



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>



C O U R S
D E
MATHÉMATIQUE.

S E C O N D E P A R T I E.

É L É M E N S
D E G É O M É T R I E
T H É O R I Q U E E T P R A T I Q U E.

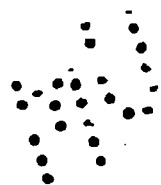
Charles Etienne Louis
P A R M. C A M U S

*De l'Académie Royale des Sciences, Examineur
des Ingénieurs, Professeur & Secrétaire perpétuel
de l'Académie Royale d'Architecture.*

A P A R I S,
Chez D U R A N D, Libraire, rue saint Jacques au Griffon.

M. D. C C. L.

Avec Approbation & Privilège du Roi.



112. of 22.
Vaug 18013
4-7-24
9984

P R É F A C E.

EN travaillant à cette seconde Partie du Cours de Mathématique dans lequel j'ai promis de réunir les élémens des Sciences propres à un Ingénieur, je me suis proposé de rassembler les Propositions de Géométrie nécessaires pour entendre facilement toutes les parties de cette Science qu'on peut traiter synthétiquement, & d'indiquer les principaux usages qu'on peut faire de ces Propositions dans la Pratique. Je n'en ai donc pas toujours poussé l'application aussi loin que le sujet paroïssoit le demander, lorsque ce sujet méritoit un traité particulier un peu étendu, ou qu'il exigeoit la démonstration de quelques Théorèmes qu'il n'étoit pas naturel de placer dans des Elémens de Géométrie.

Ce Traité est partagé en dix Livres, précédés des Notions préliminaires qu'il faut avoir des trois espèces d'Etendues qui font l'objet de la Géométrie, des Principes généraux sur lesquels elle est fondée, des différentes sortes de Propositions qui la composent, & des divers Signes dont on y fait usage pour abréger les démonstrations.

Dans le premier Livre j'explique les propriétés générales des Lignes droites dans le cas où

elles se rencontrent , & dans celui où elles ne peuvent point se rencontrer , celles qui naissent de la rencontre d'un Cercle avec des Lignes droites ou avec d'autres Cercles , les Problèmes qu'on en peut déduire pour la Pratique , & la mesure des Angles dans les quatre positions qu'ils peuvent avoir à l'égard de la Circonférence.

Dans le second Livre , je traite des Superficies & de leurs figures ; j'y explique la nature & les propriétés générales des Triangles & des Parallélogrammes , & ce qui constitue leur égalité ou leur inégalité ; la manière de trouver leurs aires relativement aux mesures de leurs bases & de leurs hauteurs ; j'y considère les Polygones en général & l'Exagone en particulier , l'aire d'un Polygone régulier quelconque , celle du Cercle & de ses parties : enfin j'y enseigne à réduire les figures rectilignes à des figures plus simples , & j'explique par ce moyen l'addition , la soustraction , la multiplication & la division de ces Figures.

Le troisième Livre est une théorie assez étendue des Rapports & des Proportions géométriques. J'y explique non seulement les différentes Regles qu'on peut suivre pour changer une Proportion en d'autres Proportions , mais encore la manière de conclure une Proportion de plusieurs autres dont les Rapports sont différents ; ce qui me donne dans la suite beaucoup de facilité pour démontrer un grand nombre de Propositions. Enfin , j'y donne la méthode de sommer les Progressions géométriques , tant celles dont le nombre des termes est fini , que celles dont le nombre des termes est infini , comme il

peut l'être dans les Progressions décroissantes.

Dans le quatrième Livre, il est question des Rapports des Lignes. J'y considère les Lignes coupées proportionnellement, les Triangles semblables, les quatrièmes & troisièmes Proportionnelles à trois Lignes ou à deux Lignes données, & les Lignes qui concourent en un même Point. J'y donne une idée générale des Polygones semblables, & de leur division en parties semblables. J'y expose la nature & les propriétés des Points semblablement placés ; ce qui me conduit à expliquer l'art de lever les Plans, au sujet duquel je n'entre pas dans un grand détail, parce qu'il demande un traité particulier. Enfin, je termine ce Livre par l'examen des Rapports des Lignes homologues & des contours des Figures semblables ; ce qui me donne occasion de parler de l'addition, de la soustraction, de la multiplication & de la division de ces contours.

Le cinquième Livre a pour objet les Rapports des surfaces & principalement de celles des Figures semblables. J'y démontre les Rapports des Figures semblables dont les côtés homologues forment un Triangle rectangle ; & cette théorie me fournit une méthode pour l'addition, soustraction, multiplication & division des Figures semblables. J'y démontre aussi les Rapports des Quarrés construits sur les côtés d'un Triangle quelconque ; d'où je déduis la démonstration de plusieurs Théorèmes utiles dans la Pratique.

Dans le sixième Livre, je considère les Lignes coupées en parties réciproquement proportionnelles entr'elles ou à leurs totalités ; j'en tire les différentes constructions des Moyennes propor-

tionnelles ; & j'en fais voir l'usage dans la Pratique pour transformer un Triangle ou un Polygone quelconque en une autre Figure semblable à une Figure donnée. J'y enseigne aussi à couper des Lignes en moyenne & extrême Raison , & je montre l'application de ces Lignes à la division de la circonférence du Cercle en dix parties égales. J'y considère encore les Lignes coupées en trois Segmens , dont l'un est Moyen proportionnel entre les deux autres ; & je fais usage de ces Lignes pour la division des Plans rectilignes , ou pour mener par un Point donné une Ligne qui retranche d'un Polygone quelconque une partie de grandeur donnée.

Le septième Livre qui traite de la rencontre des Plans entr'eux & avec des Lignes droites , n'est qu'une préparation au huitième , dans lequel je parle des Solides.

Les Solides dont il est question dans le huitième Livre , se réduisent au Prisme , au Cylindre , à la Pyramide , au Cône & à la Sphere. En considérant leurs surfaces & leurs solidités , je fais dépendre leur mesure de celle des Lignes qui peuvent rendre les opérations plus courtes & plus commodés.

Le Livre neuvième est un Traité de Trigonométrie plane , dans lequel après avoir expliqué & éclairci par un grand nombre d'exemples la construction des Tables des Sinus , Tangentes , Sécantes & de leurs Logarithmes , je donne la résolution des triangles rectilignes , rectangles & non rectangles.

Dans le Livre dixième , après avoir parlé de la mesure des Arcs & des portions de Cercles ,

P R É F A C E.

J'examine une espèce de Demi-ovale que les Praticiens substituent à l'Ellipse dans la construction des Voutes. Cette Courbe qu'ils nomment *Anse de Panier* est ordinairement composée de trois portions de Cercles qu'ils décrivent suivant différentes méthodes plus ou moins exactes. J'en donne, pour un diamètre & une hauteur quelconques, une construction géométrique que je compare avec les constructions reçues, pour déterminer en quoi & de combien ces dernières pèchent dans la Pratique. Je donne ensuite une méthode fort simple pour toiser la longueur de cette espèce de Courbe.

Enfin je propose différentes méthodes pour construire & pour toiser des Anses de Panier à cinq centres, lesquelles ressemblent mieux à l'Ellipse que les précédentes, & peuvent avec plus de raison en tenir lieu dans les Toisés. Ces Courbes n'étant point déterminées par le diamètre & la montée des Anses & par le nombre de degrés de chacun des Arcs qui les composent, je les détermine en ajoutant différentes conditions propres à rendre leur forme plus agréable.

Si l'on joint ce qui est dit dans ce dixième Livre de l'Ellipse & des Anses de Panier, avec ce qu'on a vu du Cylindre dans le huitième, on aura une théorie suffisante des Voûtes en berceau, circulaires, surmontées & surbaissées. Comme les Dômes en plein cintre sont des Demi-sphères dont on a assez parlé dans le huitième Livre, il faudroit pour compléter la théorie du Toisé des Voûtes, considérer encore les Voûtes d'arrête, & celles en Arc de cloître en

27

P R É F A C E.

plein cintre surbaissées & surmontées. Mais ce Traité étant déjà trop long, je me réserve à parler de ces dernières Voûtes dans le Traité suivant, où j'aurai occasion d'expliquer quelques Propositions dont leur toisé dépend.

E X T R A I T D E S R E G I S T R E S

de l'Académie Royale des Sciences.

MESSIEURS NICOLE & CLAIRAUT, qui avoient été nommés pour examiner un Ouvrage de M. Camus intitulé *Cours de Mathématique élémentaire*, à l'usage des Ingénieurs, ayant fait leur rapport de la partie de ce Cours qui contient la Géométrie, & qui en doit composer le second Volume, l'Académie a jugé cette partie de l'Ouvrage digne de l'impression. En foi de quoi j'ai signé le présent Certificat. A Paris, le 21 Mars 1750.

GRANJEAN DE FOUCHY, Secrétaire perpétuel
de l'Académie Royale des Sciences.

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE

THÉORIQUE ET PRATIQUE.



NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

DE L'OBJET DE LA GÉOMÉTRIE.



A GÉOMÉTRIE est la Science de l'Étendue. On considère trois espèces d'Étendues ; la *Ligne*, la *Superficie*, & le *Solide*.

La *Ligne* est une Étendue en longueur seulement.

La *Superficie* est une Étendue en longueur & largeur.

Le *Solide* est une Étendue en longueur, largeur & profondeur.

On connoît assez la nature du Corps mathématique, c'est-à-dire, de l'Étendue en longueur, largeur & profondeur ; mais on ne conçoit pas avec la même facilité ce que sont la *Ligne* & la *Superficie*, ni comment ces deux espèces d'Étendues peuvent exister.

Géom.

A *

NOTIONS

La Surface n'est proprement que l'extrémité d'un Corps. On pourroit en quelque façon la considérer comme une enveloppe infiniment mince qui contiendrait le Corps. Or l'extrémité d'un Corps doit avoir longueur & largeur pour terminer & contenir le Corps; mais elle ne peut pas avoir d'épaisseur: car si elle avoit encore de l'épaisseur, elle seroit elle-même un Corps. Donc la Surface est une Étendue en longueur & largeur sans épaisseur.

La Ligne est le bord d'une Surface. Or le bord d'une Surface doit avoir de la longueur pour entourer la Surface; mais il ne peut avoir ni épaisseur ni largeur. 1°. Le bord d'une Surface ne peut point avoir d'épaisseur, puisque la Surface à laquelle il appartient n'en a point. 2°. Il ne peut pas avoir de largeur; car s'il avoit de la largeur avec sa longueur, il seroit lui-même une Surface. Donc la Ligne est une Étendue en longueur seulement.

Le Point est le bout d'une Ligne; ainsi le Point ne peut avoir ni longueur, ni largeur, ni épaisseur.

1°. Le Point ne peut avoir ni largeur ni épaisseur, puisqu'il appartient à la Ligne qui n'en a point elle-même. 2°. Il ne peut point avoir de longueur; autrement il seroit une Ligne, & non pas le bout d'une Ligne.

Le Point n'est donc pas une Étendue; ainsi il ne peut pas faire partie de l'objet de la Géométrie.

On voit par ce qui vient d'être dit, que le Point, la Ligne & la Surface n'existent point par eux-mêmes; mais il est évident qu'ils existent par les Corps & avec les Corps.

Quoique le Point n'ait aucune dimension, l'on peut le considérer comme le premier principe générateur de l'Étendue produite par le mouvement.

PRÉLIMINAIRES.

1°. Un Point qui se meut, décrit une Ligne; car il parcourt une longueur, sans largeur ni épaisseur.

2°. Une Ligne qui se meut de manière que toutes ses parties aillent de front, parcourt une Étendue qui a longueur & largeur, & engendre par conséquent une Superficie.

3°. Enfin une Superficie qui se meut de manière que toutes ses parties aillent de front, parcourt une Étendue qui a longueur, largeur & profondeur, & qui est par conséquent un Corps.

DES PRINCIPES

ET DES AUTRES PROPOSITIONS DE LA GÉOMÉTRIE.

LES Principes de la Géométrie sont les Propositions fondamentales sur lesquelles on établit la Démonstration des autres Propositions.

On distingue trois sortes de Principes; les *Axiômes*, les *Définitions* & les *Demandes*.

Axiômes.

On appelle *Axiôme* une Proposition évidente par elle-même, & qui n'a pas besoin de Démonstration. Voici les Axiômes dont on fera usage dans ce Traité.

I. Une même chose ne peut pas être & n'être pas en même temps.

II. Un Tout est égal à toutes ses Parties prises ensemble.

Ainsi la moitié ou le tiers ou le quart &c d'un Tout, vaut la moitié ou le tiers ou le quart &c de toutes ses Parties; & le double ou le triple ou le quadruple &c

d'un Tout, est égal au double ou au triple ou au quadruple &c de toutes ses Parties.

III. Le Tout est plus grand qu'une de ses Parties.

IV. Si à des Grandeurs égales on ajoute des Grandeurs égales, les Grandeurs totales qui résulteront de ces additions seront égales.

V. Si de Grandeurs égales on retranche des Grandeurs égales, ou une même Grandeur, les Restes seront égaux.

VI. Les Grandeurs qui sont toutes ou doubles ou triples ou également multiples d'une même Grandeur ou de Grandeurs égales, sont égales entr'elles.

VII. Les Grandeurs qui sont toutes, ou la moitié, ou le tiers, ou le quart, ou également sous-multiples d'une même Grandeur, ou de Grandeurs égales, sont égales entr'elles.

VIII. Si à des Grandeurs inégales on ajoute des Grandeurs égales, ou une même Grandeur, les Touts seront inégaux; & le plus grand Tout sera celui qui contiendra la plus grande des deux Grandeurs inégales.

IX. Si de Grandeurs égales ou d'une même Grandeur, on retranche des Grandeurs inégales, les Restes seront inégaux; & le plus grand Reste sera celui de la Quantité dont on aura le moins retranché.

X. Si de Grandeurs inégales on retranche une même Grandeur, ou des Grandeurs égales, les Restes seront inégaux; & le plus grand Reste sera celui de la plus grande des deux Quantités inégales.

XI. Si trois Grandeurs sont telles que la première soit plus grande que la seconde, & la seconde plus grande que la troisième, la première sera à plus forte raison plus grande que la troisième.

XII. Les Lignes ou les Superficies qui étant appliquées les unes sur les autres conviennent parfaitement, sont égales.

Cet Axiôme est le principe le plus simple de l'Éga-

lité; ainsi nous l'emploierons autant que nous pourrions pour démontrer l'égalité des Lignes & des Surfaces.

XIII. *D'un Point à un autre, il n'y a qu'un seul chemin qui soit le plus court de tous.*

Définitions.

Une *Définition* est la déclaration de ce qu'on entend par un Mot ou un Terme dont on veut faire usage. Ainsi les Définitions sont nécessaires pour prévenir les équivoques, en fixant la signification des Mots.

On a déjà donné quatre Définitions en expliquant ce qu'on entend par ces mots Corps, Surface, Ligne, & Point mathématiques. On donnera les autres Définitions à mesure qu'on en aura besoin.

Demandes.

Les *Demandes* sont des suppositions d'Opérations qu'on peut faire sans aucune difficulté, ou qu'on peut du moins imaginer. Voici trois Demandes que nous ferons après Euclides.

1°. *Qu'il soit permis de mener une Ligne droite d'un Point quelconque à tel autre Point qu'on voudra.*

2°. *Une Ligne droite étant terminée, qu'il soit permis de la prolonger aussi loin qu'on voudra, ou d'imaginer qu'elle est prolongée.*

3°. *Qu'il soit permis de décrire un Cercle de tel Centre & de tel intervalle qu'on voudra, ou d'imaginer que ce Cercle est décrit.*

Ces trois Opérations sont si faciles & si simples; lorsqu'on fait ce que sont une Ligne droite & un Cercle, qu'on ne peut pas refuser d'accorder qu'on peut les faire, ou qu'on peut du moins les imaginer.

Des autres Propositions de la Géométrie.

Les trois sortes de Principes dont on vient de parler, servent de premiers fondemens à cinq autres especes de Propositions qui sont les *Théorèmes*, les *Problèmes*, les *Corollaires*, les *Lemmes*, & les *Scholies*.

Le *Théorème* est une Proposition dont il faut démontrer la vérité.

Le *Problème* est une Proposition dans laquelle il s'agit de découvrir une vérité, ou d'exécuter quelque chose que l'on demande.

Le *Corollaire* est une conséquence d'un *Théorème* démontré ou d'un *Problème* résolu.

Le *Lemme* est un *Théorème* ou un *Problème* déplacé, qu'on ne démontre ou qu'on ne résout que pour faciliter la Démonstration d'un *Théorème* ou la solution d'un *Problème* plus difficile.

Le *Scholie* est une remarque que l'on fait sur une Proposition pour en montrer l'utilité, ou une recapitulation de plusieurs Propositions dont on veut faire voir l'accord.

EXPLICATION DES MARQUES OU SIGNES

QU'ON EMPLOIE DANS LA GÉOMÉTRIE.

LE Signe $+$ est la marque de l'Addition. Il se nomme *Plus*, & signifie que la Grandeur qui le suit doit être ajoutée à celle qui le précède. Par exemple, $5 + 3$ veut dire qu'on ajoute 3 avec 5 ; ce qui s'exprime ainsi, *Cinq plus Trois*.

Le Signe $-$ est la marque de la Soustraction. Il se nomme *Moins*, & signifie que la Grandeur qui le suit

doit être retranchée de celle qui le précède. Par exemple, $5 - 3$ signifie qu'on retranche 3 de 5 ; ce qui s'exprime ainsi, *Cinq moins Trois*.

Le Signe $=$ est la marque de l'Égalité. Il se nomme *Égal*, & signifie que le terme qui le précède, ou le résultat des termes qui sont devant lui, est égal au terme qui le suit, ou au résultat des termes qui sont après lui. Par exemple, $5 + 3 = 8$ signifie que 5 plus 3 est égal à 8 ; & $5 + 3 = 11 - 3$ signifie que 5 plus 3 est égal à 11 moins 3.

Les deux Quantités séparées par le Signe $=$, soit qu'elles n'ayent chacune qu'un seul terme, ou qu'elles aient chacune plusieurs termes, ou enfin que l'une ait plusieurs termes & que l'autre n'en ait qu'un, sont appelées *Membres de l'Égalité*. On appelle *Premier Membre* celui qui est à la gauche du Signe, & *Second Membre* celui qui est à sa droite.

Les deux Signes $>$, $<$, sont les marques de l'Inégalité. Le premier $>$ s'appelle *Plus grand*, & le second $<$ s'appelle *Plus petit*. Ils signifient l'un & l'autre que le terme ou le résultat de tout ce qu'il y a du côté de l'ouverture est plus grand que le terme ou le résultat de tout ce qui est du côté de la pointe. Par exemple, $5 + 4 > 8$ signifie que 5 plus 4 est plus grand que 8 ; & $8 < 5 + 4$ signifie que 8 est plus petit que 5 plus 4.

Les Grandeurs séparées par le Signe $>$ ou par le Signe $<$ sont appelées *Membres de l'Inégalité*. On nomme *Premier Membre* celui qui est à la gauche du Signe, & *Second Membre* celui qui est à sa droite.

Le Signe \times est la marque de la Multiplication. Il s'appelle *Multiplié par*, & signifie que la Grandeur qui le précède est multipliée par celle qui le suit. Par exemple, 5×3 signifie que 5 est multiplié par 3.

Lorsque le Signe \times est précédé de plusieurs Quan-

tités, il ne signifie pas toujours que les Quantités qui sont avant lui sont toutes multipliées par celle qui est après lui. Par exemple, dans cette expression $5 + 3 \times 4$, le Signe \times qui est entre 3 & 4 signifie seulement que 3 est multiplié par 4; & le Signe $+$ qui est entre 5 & 3×4 signifie que le produit de 3 multiplié par 4, qui est 12, doit être ajouté à 5 : en sorte que l'expression entière $5 + 3 \times 4$ est la même chose que $5 + 12$ ou 17.

Si l'on vouloit indiquer par le Signe \times que toutes les Quantités qui le précédent sont multipliées par celle qui le suit, il faudroit renfermer entre deux Parenthèses toutes les Quantités qui précédent ce Signe. Par exemple, si l'on vouloit marquer que la somme de $5 + 3$ doit être multipliée par 4, il faudroit écrire $(5 + 3) \times 4$; ce qui signifieroit que $5 + 3$ ou 8 doit être multiplié par 4.

Il arrive souvent qu'une ou plusieurs des Quantités qui précédent le Signe \times , ne doivent point être multipliées, & qu'il en reste encore plusieurs qui doivent être multipliées. Dans ce cas, on met entre deux Parenthèses immédiatement avant le Signe \times toutes les Quantités qui doivent être multipliées; & l'on met avant la première Parenthèse toutes celles qui ne doivent point être multipliées. Par exemple, si des quatre Quantités $5 + 3 + 6 - 2$ il n'y avoit que les deux dernières $6 - 2$ qui dussent être multipliées par 4, on écriroit $5 + 3 + (6 - 2) \times 4$; ce qui signifieroit que $6 - 2$ ou 4 est multiplié par 4, & que le produit 16 de cette multiplication est ajouté avec $5 + 3$ ou avec 8.

De même lorsque le Signe \times est suivi de plusieurs termes, il ne signifie pas toujours que toutes les Quantités qui sont après lui doivent multiplier celles qui sont avant lui, & qui sont marquées pour être

multipliées. Par exemple, $8 \times 4 + 2$ ou $(5 + 3) \times 4 + 2$ signifie seulement que 8 ou $5 + 3$ est multiplié par 4 ; & le Signe $+$ qui se trouve entre 4 & 2 marque que 2 doit être ajouté au produit de cette multiplication.

Si l'on vouloit marquer que toutes les Quantités, ou plusieurs des Quantités qui sont après le Signe \times , doivent multiplier celles ou plusieurs de celles qui sont avant ce même Signe, il faudroit renfermer entre des Parenthèses immédiatement après le Signe \times toutes les Quantités qui doivent multiplier, & mettre pareillement, comme nous l'avons déjà dit, entre deux Parenthèses immédiatement avant le même Signe toutes les Quantités qui doivent être multipliées. A l'égard des Quantités qui ne doivent point être multipliées ou qui ne doivent point multiplier, on peut les mettre toutes avant le multiplicande ou après le multiplicateur, ou en mettre une partie avant le multiplicande, & une partie après le multiplicateur.

Par exemple, si l'on avoit d'une part $4 + 5 - 3$; & d'autre part $3 + 8 - 2$, & qu'on dût seulement multiplier $5 - 3$ par $8 - 2$, on pourroit écrire $4 + 3 + (5 - 3) \times (8 - 2)$, ou $(5 - 3) \times (8 - 2) + 4 + 3$, ou $4 + (5 - 3) \times (8 - 2) + 3$; ce qui signifieroit que le produit $(5 - 3) \times (8 - 2)$, ou 2×6 , doit être ajouté avec la somme de 4 & 3.

Au lieu de rassembler entre deux Parenthèses les Quantités qui doivent être multipliées, ou celles par lesquelles on doit multiplier, on se contente souvent de lier toutes celles qui doivent être multipliées, par une barre qu'on met au-dessus d'elles, & de lier par une semblable barre toutes celles qui doivent multiplier. Par exemple : $\overline{5 + 3} \times 4$ marque que la somme de 5 & 3 est multipliée par 4 ; $\overline{5 + 3} \times 4 + 2$ signifie que la somme de 5 & 3 est multipliée par 4

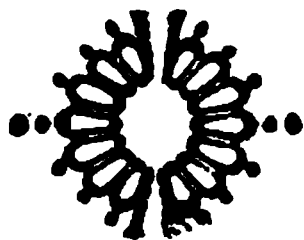
10 NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

Et qu'on ajoute 2 au produit ; $\overline{5+3} \times \overline{4+2}$ désigne qu'on multiplie la somme de 5 & 3 par celle de 4 & 2 ; $\overline{4+3+5-3} \times \overline{8-2}$ signifie que $5-3$ ou 2 est multiplié par $8-2$, c'est-à-dire, par 6, & qu'on ajoute au produit la somme de 4 & 3.

Une Ligne horizontale entre deux Grandeurs, dont l'une est au-dessus & l'autre au-dessous, est la marque de la Division, & indique que la Quantité supérieure est divisée par la Quantité inférieure. Par exemple, $\frac{5}{3}$ signifie qu'on divise 5 par 3 ; & $\frac{5+4}{6-3}$ signifie que la somme de 5 & 4 est divisée par la différence de 6 à 3, c'est-à-dire, que 9 est divisé par 3.

Le Signe \sim est la marque de la Ressemblance & se nomme *Semblable*. Il signifie que la Grandeur qui le précède est semblable à celle qui le suit. Par exemple, si deux Figures nommées ABC , EDF , étoient semblables, on écrirait $ABC \sim EDF$.

On emploiera plusieurs autres Signes pour abréger les expressions dans les Démonstrations ; mais on attendra pour les expliquer qu'on ait besoin de s'en servir,



ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE THÉORIQUE ET PRATIQUE.



LIVRE PREMIER.

Des Lignes.

CHAPITRE PREMIER.

Des Lignes droites & courbes en général.

DÉFINITIONS.



NOUS avons dit que la Ligne est une Étendue en longueur seulement.

On distingue deux sortes de Lignes en général ; la *Ligne droite* & la *Ligne courbe*.

I. La Ligne droite est le chemin le plus court entre les deux Points qui la terminent.

Le chemin le plus court d'un Point à un autre s'appelle aussi *Distance*. Ainsi la Distance d'un Point à un autre, n'est autre chose qu'une Ligne droite tirée entre ces deux Points.

12 Liv. I. Chap. I. DES LIGNES DROITES

Lorsque l'on coupe une Ligne, ses parties se nomment *Segmens*, & les Points où elle est coupée s'appellent *Sections*.

On a demandé 1°. Qu'il soit permis de tirer ou d'imaginer une Ligne droite d'un Point quelconque à tel autre Point qu'on voudra.

2°. Une Ligne droite étant terminée par deux Points, qu'il soit permis de la prolonger ou d'imaginer qu'elle est prolongée aussi loin qu'il est nécessaire.

Les Lignes Mathématiques, que l'on considère dans la Théorie de la Géométrie, n'ayant ni largeur ni épaisseur, ne peuvent point être tracées. Pour les représenter, on fait des traits assez gros pour être aperçus, & assez déliés pour que l'erreur qu'ils peuvent causer dans une Figure ne soit pas sensible.

Lorsque les Lignes droites ne sont pas fort longues, on se sert ordinairement d'une Règle pour les tracer. Cet instrument étant connu de tout le monde, on peut se dispenser de le décrire.

Mais lorsque les Lignes sont trop longues, ou qu'on n'a pas de Règle assez longue pour les tracer, on se sert d'un fil ou d'un cordeau bien tendu; je dis BIEN TENDU, parce que dans le cas où le cordeau ne seroit pas vertical, ou porté par un Plan en situation de l'empêcher de se courber, le poids de ce cordeau empêcheroit qu'il ne fût exactement en Ligne droite.

On a remarqué qu'un fil de 24 pieds de long, pesant 161 grains $\frac{5}{6}$, & dont 33 diamètres font deux pouces, étant tendu horizontalement avec dix livres de force, baisse dans son milieu d'une Ligne & demie.

COROLLAIRE I.

2. Donc on ne peut mener qu'une seule Ligne droite entre deux Points.

Car (N^o. 1.) une Ligne droite est le chemin le plus court entre deux Points ; & (Ax. XIII.) entre deux Points il n'y a qu'un seul chemin qui soit le plus court de tous.

COROLLAIRE II.

3 Donc deux Points déterminent la position d'une Ligne droite.

Car (N^o. 2.) on ne peut mener qu'une seule Ligne droite par deux Points ; & par conséquent, lorsque deux Lignes droites passeront par les deux mêmes Points , elles se confondront en une seule Ligne droite.

4 Ainsi quand on voudra déterminer la direction d'une Ligne droite , il suffira de trouver deux Points de cette Ligne droite ; car en traçant à la Règle ou au cordeau une Ligne par ces deux Points , on aura la Ligne droite qu'on demande.

COROLLAIRE III.

5 Donc deux Lignes droites qui se coupent ne se rencontrent qu'en un seul Point.

Car si ces deux Lignes se rencontroient en deux Points , elles passeroient par ces deux mêmes Points , & se confondroient en une seule Ligne droite (N^o. 3.) ; ainsi elles ne se couperont point : ce qui seroit contre l'hypothèse.

COROLLAIRE IV.

6 Donc deux Lignes droites ne peuvent pas renfermer un espace.

Car pour que deux Lignes ABC , ADC , renferment un espace , il faut qu'elles partent toutes deux d'un même Point A , & qu'elles se rejoignent à un même Point C , sans se confondre ; ce que deux Lignes droites ne peuvent pas faire , puisqu'on n'en peut tirer qu'une du Point A au Point C (N^o. 2.).

Fig. 1
& 2.

14 *Liv. I. Chap. I. DES LIGNES DROITES*

Fig. 2. Il faut donc au moins trois Lignes droites AB , BC , AC , pour renfermer un espace.

COROLLAIRE V.

Fig. 2. 7 Donc si trois Lignes droites AB , BC , AC , renferment un espace, deux d'entr'elles, prises comme on voudra, seront ensemble plus longues que la troisième. Par exemple, on aura $AB + BC > AC$.

Car la Ligne AC étant droite, elle est le chemin le plus court du Point A au Point C (N^o. 1.).

N. B. On fera dans la suite un fréquent usage de ce Corollaire.

DÉFINITION.

Fig. 3. 8 Une Superficie à laquelle on peut appliquer exactement une Ligne droite en tous sens, s'appelle *Superficie plane* ou *Plan*; & si la Ligne droite ne s'y applique pas dans tous les sens, on la nomme *Superficie courbe*.

Toutes les Figures dont il sera question seront dans un même Plan, à moins qu'on n'avertisse du contraire.

Pour examiner si une Superficie est plane, on approche d'elle une Regle dans tous les sens; & si la Regle s'applique exactement sur la Superficie, on conclut que c'est un Plan.

THÉORÈME.

Fig. 4. 9 Si d'un Point D pris au dedans d'une Figure ABC renfermée par trois Lignes droites, on mene deux Droites DA , DC , aux extrémités d'un côté AC , ces deux Droites DA , DC , seront ensemble plus courtes que la somme $AB + BC$ des deux autres côtés de la Figure.

DÉMONSTRATION.

Soit prolongée la droite AD , jusqu'à ce qu'elle rencontre en E le côté BC . On aura

1°. $AB + BE > AE$ (N°. 7.); & ajoutant EC à chaque Membre, on aura $AB + BC > AE + EC$ (Ax. VIII.).

2°. Mais on aura aussi $DE + EC > DC$ (N°. 7.); & ajoutant AD à chaque Membre, on aura $AE + EC > AD + DC$ (Ax. VIII.).

Donc (Ax. XI.) on aura à plus forte raison $AB + EC > AD + DC$ ou $AD + DC < AB + BC$.
Ce qu'il falloit démontrer.

DÉFINITION.

10 On appelle en général *Ligne courbe* toute Ligne qui n'est pas le chemin le plus court entre ses extrémités.

Suivant cette Définition, une Ligne qui ne seroit pas droite, mais qui seroit composée de plusieurs parties droites, comme la Ligne $ABCD$, pourra être appelée une Ligne courbe. Cependant il n'y a que les Lignes dont aucune partie n'est droite, qui soient des Courbes proprement dites. Fig. 5.

COROLLAIRE.

11. Donc on peut mener une infinité de Lignes courbes entre deux Points.

Car entre deux Points il y a une infinité de chemins qui ne sont pas le plus court.

De toutes les Lignes courbes proprement dites, dont le nombre est infini, il n'y en a qu'une seule dont on fasse usage dans les Éléments de Géométrie; c'est la Circonférence du Cercle.

DÉFINITION.

12 1°. Une Ligne $ABDEA$ qui renferme un Espace plan, & dont tous les Points A, B, D, E , &c sont également éloignés d'un même Point C Fig. 6.

16 Liv. I. Chap. I. DES LIGNES DROITES &c.

pris au dedans de ce Plan, se nomme *Circonférence*; chaque portion de cette *Circonférence* s'appelle *Arc*; & l'Espace plan renfermé par la *Circonférence* entiere se nomme *Cercle*.

Toute Ligne tirée du Centre à la *Circonférence* se nomme *Rayon*. Ainsi tous les Rayons d'un même *Cercle*, ou de *Cercles* égaux, sont égaux entr'eux.

On a demandé qu'il soit permis de décrire un *Cercle* de tel Centre & de tel *Rayon* qu'on voudra.

L'instrument dont on se sert pour décrire un Cercle ou pour tracer sa Circonférence, se nomme Compas. Cet instrument étant connu de tout le monde, il est inutile d'en faire la description.

Lorsque le Compas n'est pas assez grand, l'on décrit aussi un Cercle avec une perche ou un cordeau dont on assujétit une extrémité au Point qui est donné pour Centre.

13 On emploie les *Arcs de Cercles*, ou plutôt le *Compas* ou le cordeau qui sert à les tracer, pour trouver des *Points* dont chacun soit également éloigné de deux *Points* donnés, tels que F, G.

Fig. 7.

Car si l'on ouvre le *Compas* de maniere qu'il comprenne plus de la moitié de l'Intervalle F G, ou qu'on prenne un *Cordeau* plus grand que la moitié de cet Intervalle, & que des *Points* donnés F, G, comme Centres on décrive deux *Arcs* BAC, DAE, qui se coupent dans un *Point* A, ce *Point* A sera à égale distance des deux *Points* donnés F, G; puisque si des deux Centres F, G, l'on tire des *Droites* FA, GA, à la Section A des deux *Arcs*, ces *Droites* seront des *Rayons* égaux par construction.

On trouvera de la même façon tant de *Points* H, h, qu'on voudra, dont chacun sera également éloigné des deux *Points* donnés F, G.

CHAPITRE II,

page 2

CHAPITRE II.

Des Angles en général, & de leurs différentes especes.

14 **O**N appelle *Angle* l'ouverture de deux Lignes AB , BC , qui se rencontrent en un Point. Fig. 8.

Les Lignes AB , BC , qui forment l'Angle par leur ouverture, s'appellent *Côtés* de l'Angle.

Le Point B , où les Côtés de l'Angle se rencontrent, se nomme *Tête* ou *Sommet* ou *Pointe* de l'Angle.

On distingue trois especes d'Angles;

L'Angle rectiligne qui est formé par deux Lignes droites;

L'Angle curviligne qui est formé par deux Lignes courbes;

L'Angle mixtiligne qui est formé par une Ligne droite & par une Ligne courbe.

Mais les deux dernieres especes d'Angles pouvant être rapportées à la premiere par le moyen des Tangentes, nous ne parlerons dans ce Traité que des Angles rectilignes.

On remarquera que pour désigner un Angle il est souvent nécessaire de le nommer par trois lettres, en observant de mettre au milieu de la nomination la lettre qui en marque le Sommet. Ainsi pour nommer l'Angle formé par AB & par BC , il faut dire : l'Angle ABC , ou CBA ; & l'on ne doit point dire : l'Angle ACB , ni CAB , ni BAC , ni BCA .

On peut désigner un Angle par une seule lettre B qui marque son Sommet, lorsque ce Sommet B n'appartient à aucun autre Angle. Ainsi l'Angle ABC étant seul à son Sommet B , peut être nommé l'Angle B . Fig. 8.

Fig. 9. Mais si plusieurs Angles ABC , CBD , ABD , ont leur Sommet au même Point B , on ne pourra nommer aucun de ces Angles par la seule lettre B de son Sommet. Car en disant l'Angle B , on ne distingueroit pas lequel des trois Angles ABC , CBD , ABD , on veut désigner. Ainsi pour indiquer l'Angle formé par AB & BC , il faut dire : l'Angle ABC ou CBA ; pour nommer l'Angle formé par CB & BD , il faut dire : l'Angle CBD ou DBC ; & pour marquer l'Angle formé par AB & par BD , il faut dire : l'Angle ABD ou DBA .

COROLLAIRE I.

15 Puisque l'Angle consiste dans l'ouverture de ses côtés, sa grandeur ne doit pas dépendre de leur longueur. Ainsi pour agrandir ou pour diminuer un Angle, il faut nécessairement écarter ou rapprocher ses côtés l'un de l'autre, en les faisant tourner sur leur Sommet, comme on fait tourner les branches d'un Compas sur sa tête ou charnière, quand on veut l'ouvrir ou le fermer.

Fig. 10. L'Angle FBG est donc plus grand que l'Angle ABC , quoique les cotés du premier soient plus courts que ceux du second. Car les côtés de l'Angle FBG sont plus ouverts que ceux de l'Angle ABC .

Fig. 11. L'Angle ABC est donc égal à l'Angle DBE , quoique les côtés du premier soient beaucoup plus longs que ceux du second. Car ces deux Angles ont la même ouverture.

COROLLAIRE II.

Fig. 11 & 12. 16 Donc si deux Angles dbe , ABC , sont égaux, & que l'on place le Sommet de l'un sur le Sommet de l'autre, en sorte que le côté db du premier tombe

en DB sur le côté AB du second, il faudra que le côté be du premier Angle tombe en BE sur le côté BC du second. Car si le côté be tomboit en dehors ou en dedans de l'Angle ABC , l'Angle dbe seroit plus grand ou plus petit que l'Angle ABC ; ce qui seroit contre la supposition.

DÉFINITIONS.

17 1°. Lorsqu'une Droite AB ne penche d'au- Fig. 131
cun côté sur une Droite FG , on la nomme *Perpendiculaire* à FG .

2°. Si la Droite BD penche de l'un ou de l'autre côté sur la Droite FG , on la nomme *Oblique* à FG .

3°. Les deux Angles ABF , ABG , que la Perpendiculaire AB forme avec FG , s'appellent *Angles droits*.

4°. Des deux Angles inégaux DBF , DBG , que l'Oblique DB forme avec FG , le plus grand DBF se nomme *Angle obtus*, & le plus petit DBG se nomme *Angle aigu*.

5°. Les deux Angles formés par la Perpendiculaire AB ou par l'Oblique DB se nomment ensemble *Angles de suite*.

COROLLAIRE I.

18 Donc on ne peut tirer qu'une seule Perpendi- Fig. 132
culaire AB au même Point B d'une Droite FG , & dans le même Plan. Car si par le Point B l'on menoit une seconde Ligne BD , elle pencheroit plus d'un côté que de l'autre, & par conséquent ne seroit pas perpendiculaire à FG .

Mais on peut mener une infinité d'Obliques à la Droite FG par le même Point B . Car il est évident qu'on peut tirer par ce Point une infinité de lignes qui pencheront différemment sur la Droite FG ,

COROLLAIRE II.

Fig. 13. 19 Donc la Perpendiculaire AB fait avec FG deux Angles égaux ABF , ABG ; & par conséquent les Angles droits sont égaux: au contraire l'Oblique DB fait toujours deux Angles inégaux DBF , DBG .

Car si la Perpendiculaire AB faisoit des Angles inégaux ou des ouvertures inégales avec FG , elle pencheroit plus du côté de la petite ouverture que du côté de la plus grande; ce qui seroit contre sa définition: & au contraire, si l'Oblique DB faisoit des Angles égaux avec FG , elle ne pencheroit pas plus d'un côté que de l'autre; ce qui seroit aussi contre la définition de la Ligne oblique.

COROLLAIRE III.

Fig. 13. 20 Donc l'Angle obtus DBF est plus grand que le droit ABF ou ABG ; & l'Angle aigu DBG est plus petit que le droit ABG ou ABF .

THÉORÈME.

21 Deux Angles de suite valent toujours ensemble deux Angles droits.

DÉMONSTRATION.

Fig. 13. 1°. Lorsqu'une Droite AB est perpendiculaire à FG , chacun des deux Angles ABF , ABG , qu'elle forme, est droit (N°. 17.). Ainsi ces deux Angles valent ensemble deux droits.

2°. Si la Droite BD , qui fait deux Angles de suite, est oblique à FG , soit tirée la Perpendiculaire AB . On verra que l'Angle obtus DBF surpassera le droit ABF de la même quantité angulaire ABD , dont l'aigu DBG est surpassé par le droit ABG . Ainsi l'obtus DBF & l'aigu DBG

de fuite valent ensemble autant que deux Angles droits.

Donc en général deux Angles de fuite, formés par une Perpendiculaire AB ou par une Oblique DB qui rencontre une Droite FG , valent toujours ensemble autant que deux Angles droits. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

22 Donc deux Angles de fuite valent ensemble autant que deux autres Angles de fuite ; car ils ont même valeur, savoir, deux droits.

COROLLAIRE II.

23 Donc si deux Angles DBF , DBG , qui ont un côté commun DB , & leur Sommet au même Point B , valent ensemble moins ou plus que deux Angles droits, la Ligne FBG ne sera pas droite ; mais elle fera un Angle au Point B . Car si la Ligne FBG étoit droite, les deux Angles DBF , DBG , vaudroient ensemble deux Angles droits (N^o . 21.).

Fig. 14
& 15.

COROLLAIRE III.

24 Donc si la Ligne FBG est brisée en B , c'est-à-dire, si elle fait un Angle en B , les deux Angles DBF , DBG , vaudront ensemble moins ou plus que deux Angles droits. Car si l'on tire BC en Ligne droite avec FB , les deux Angles DBF , DBC , vaudront ensemble deux droits (N^o . 21.). Ainsi les Angles DBF , DBG , qui sont différents de DBF , DBC , doivent valoir ensemble moins ou plus que deux Angles droits.

Fig. 14
& 15.

COROLLAIRE IV.

25 Donc si deux Angles DBF , DBG , valent ensemble autant que deux droits, la Ligne FG sera

Fig. 16.

droite. Car si elle étoit rompue en B , les deux Angles DBF , DBG , vaudroient ensemble moins ou plus que deux droits (N^o. 24.).

COROLLAIRE V.

Fig. 17. 26 Si dans un même Plan l'on tire plusieurs Droites AB , DB , CB , &c. au même Point B de la Droite FG , & du même côté de cette Ligne, tous les Angles FBA , ABD , DBC , CBG , &c. vaudront ensemble deux Angles droits. Car tous ces Angles seront toutes les parties de deux Angles de suite DBF , DBG , qui sont droits ou qui valent ensemble autant que deux droits (N^o. 21.).

Fig. 18. Par la même raison, tous les Angles FBE , EBH , HBG , &c. qui auront leurs Sommets au même Point B , & qui feront de l'autre côté de la Droite FG , vaudront ensemble deux Angles droits.

Fig. 19. Ainsi tous les Angles FBA , ABD , DBC , CBG , GBH , HBE , EBF , qui seront dans un même Plan autour d'un même Point B , vaudront ensemble quatre Angles droits.

DÉFINITIONS.

27 1^o. Lorsque deux Angles valent ensemble deux Droits, l'un s'appelle le *Supplément* de l'autre.

Fig. 16. Ainsi quand on a deux Angles de suite DBF , DBG , lesquels valent toujours ensemble deux droits (N^o. 22.), l'obtus DBF est le Supplément de l'aigu DBG ; & l'aigu DBG est le Supplément de l'obtus DBF .

Fig. 13. 2^o. Lorsque deux Angles ABD , DBG , valent ensemble un droit, l'un s'appelle le *Complément* de l'autre. Ainsi ABD est le Complément de DBG .

Fig. 20 & 21. 3^o. Lorsque deux Droites AB , DE , se croisent en un Point C , les deux Angles ACD , BCE , ou

les deux ACE , BCD , s'appellent *Angles opposés au Sommet*.

COROLLAIRE I.

28 Donc les Angles égaux ont des Suppléments égaux ; & deux Angles sont égaux , quand ils sont Suppléments d'un même Angle ou d'Angles égaux.

COROLLAIRE II.

29 De même les Angles égaux ont des Compléments égaux ; & deux Angles sont égaux, quand ils sont Compléments d'un même Angle ou d'Angles égaux.

THÉORÈME.

30 Les Angles opposés par le Sommet sont égaux.

DÉMONSTRATION.

1°. ACD est Supplément de ACE (N°. 27.) Fig. 20
 Mais BCE est aussi Supplément de ACE . Donc & 21.
 les Angles ACD , BCE , opposés au Sommet, sont égaux (N°. 28.). Ce qu'il falloit démontrer.

2°. ACE est Supplément de ACD , & BCD est aussi Supplément de ACD (N°. 27.). Donc les Angles ACE , BCD , opposés au Sommet, sont égaux (N°. 28.). Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

31 Donc si la Droite AB est perpendiculaire à la Droite ED , la Droite ED sera réciproquement perpendiculaire à la Droite AB . Fig. 21

Car si la Droite AB est perpendiculaire à la Droite ED , l'on aura (N°. 19.) $ACD = ACE$. Mais (N°. 30.) $ACE = DCB$. Ainsi l'on aura $ACD = DCB$; c'est-à-dire, que la Droite DE fera avec AB des ouvertures égales de part & d'autre, & ne pen-

chera par conséquent d'aucun côté sur la Droite AB : d'où il suit (N^o. 17.) qu'elle sera perpendiculaire à la Droite AB .

T H É O R È M E.

Fig. 20
& 21.

32 Si quatre Angles rectilignes ACD , ACE , BCD , BCE , décrits dans un même Plan, avec un Sommet commun C , sont tels que les opposés au Sommet soient égaux deux à deux ; c'est-à-dire, si $ACD = BCE$, & si $ACE = BCD$, je dis que les deux Lignes AB , DE , seront deux Lignes droites.

D É M O N S T R A T I O N.

Puisque (hypothèse) $ACD = BCE$, & $ACE = BCD$, on aura

1^o. $ACD + ACE = BCE + BCD$. Mais ces quatre Angles valent ensemble quatre Angles droits (N^o. 26.). Donc les deux $ACD + ACE$ valent ensemble deux droits ; & par conséquent DE est une Ligne droite (N^o. 25.). Ce qu'il falloit 1^o. démontrer.

2^o. $ACD + BCD = BCE + ACE$. Mais ces quatre Angles valent ensemble quatre Angles droits (N^o. 26.). Donc les deux $ACD + BCD$ valent ensemble deux droits ; & par conséquent AB est aussi une Ligne droite (N^o. 25.). Ce qu'il falloit 2^o. démontrer.



CHAPITRE III.

Des Perpendiculaires & des Obliques.

NOUS avons démontré dans le Chapitre précédent, sous le titre des *Angles*, les propriétés principales du concours des Lignes droites en général. Nous allons examiner dans celui-ci les propriétés qui dépendent du concours perpendiculaire & oblique en particulier; & nous supposerons toujours que toutes les Lignes & les Points dont nous parlerons sont dans un même Plan.

THÉORÈME.

33 Si la Droite AB est perpendiculaire sur le milieu de la Droite FG , tout Point tel que C , qui sera dans la Perpendiculaire AB , sera également éloigné des extrémités de la Droite FG . Fig. 22

DÉMONSTRATION.

Du Point quelconque C de la Perpendiculaire AB , soient tirées des Droites CF , CG , aux extrémités de la Droite FG . Si l'on plie la Figure de maniere que le pli se trouve dans la Perpendiculaire AB , comme les Angles ABF , ABG , sont égaux (N°. 19.), le côté BG se couchera sur le côté BF (N°. 16.); & puisque (*hyp.*) $BG = BF$, le Point G tombera en F : en sorte que les Droites CF , CG , qui sont les Distances du Point C aux extrémités F , G , deviendront parfaitement, & seront par conséquent égales (*Ax. XII.*) Donc le Point C est également éloigné des deux extrémités de la Droite FG .

23 Liv. I. Chap. III. DES PERPENDICULAIRES.

Ce qu'on vient de démontrer du Point C se démontrera de la même façon de tout autre Point de la Perpendiculaire AB .

Ainsi lorsqu'une Droite AB sera perpendiculaire sur le milieu d'une autre Droite FG , chaque Point de cette Perpendiculaire sera également éloigné des deux extrémités de la Droite FG . *Ce qu'il falloit démontrer.*

C O R O L L A I R E.

Fig. 22. 34 Les deux Droites CF , CG , qui partent du même Point quelconque C de la Droite AB perpendiculaire au milieu de la Droite FG , étant égales (*N^o. 33.*), nous pouvons en conclure que deux Obliques sont égales, lorsqu'elles partent d'un même Point C d'une Perpendiculaire AB , & qu'elles s'éloignent également de cette Perpendiculaire.

T H É O R È M E.

Fig. 23. 35 Si la Droite AB est perpendiculaire sur le milieu de la Droite FG , tout Point tel que D , qui ne sera pas dans cette Perpendiculaire ou dans son prolongement, ne sera pas également éloigné des extrémités de la Droite FG ;

D É M O N S T R A T I O N.

Soient tirées les Droites DF , DG , aux extrémités de FG ; & par le Point C , où la Perpendiculaire est coupée par l'une de ces Droites, soit menée la Droite CG .

Le Point C étant dans la Perpendiculaire AB , on aura $CF = CG$ (*N^o. 33.*). Ajoutant DC à chaque membre de cette Égalité, on aura $DF = DC + CG$. Mais $DC + CG > DG$ (*N^o. 7.*). Donc aussi $DF > DG$; c'est-à-dire, que le Point D , qui n'est pas dans la Perpendiculaire AB qui coupe FG en

deux parties égales, est plus éloigné du Point *F* que du Point *G*. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

36 Donc tout Point qui fera également éloigné des deux extrémités de la Droite *FG*, sera dans la Perpendiculaire qui partage cette Ligne en deux également. Car si ce Point n'étoit pas dans cette Perpendiculaire, il ne feroit pas également éloigné des deux Points *F*, *G*. (N°. 35.). Ainsi la Perpendiculaire *AB*; qui partage *FG* en deux Parties égales, passe par tous les Points également éloignés des deux extrémités *F*, *G*, de cette Ligne. Fig. 23

COROLLAIRE II.

37 Donc si l'on a deux Points *A* & *C*, ou *A* & *B*, dont chacun soit également éloigné des bouts de la Droite *FG*, la Droite *AB* qui passera par ces deux Points, sera perpendiculaire sur le milieu de *FG*. Car ces deux Points appartiennent (N°. 36.) à la Perpendiculaire qui partage *FG* en deux également; & la Perpendiculaire étant une Ligne droite, il ne faut que deux Points pour la déterminer (N°. 3.). Fig. 24

PROBLÈME.

38 Mener une Perpendiculaire *AB* sur le milieu d'une Droite *FG*.

SOLUTION.

Des deux Extrémités *F*, *G*, de la Droite *FG*, comme Centres, on décrira (N°. 13.) avec un même Rayon, c'est-à-dire, avec la même ouverture du Compas, deux Arcs qui se couperont en *A* & *D*; & par ces deux Points *A* & *D*, qui seront également éloignés des deux bouts de la Droite *FG*, on mè-

28 *Liv. I. Chap. III. DES PERPENDICULAIRES*
 nera la Droite AD , qui sera perpendiculaire sur le milieu de la Droite FG (N^o. 37.).

Si, faute de place au-dessus ou au-dessous de la Droite FG , les deux Arcs décrits du même Rayon ne peuvent pas se rencontrer en deux Points A & D , on cherchera (N^o. 13.) un second Point C ou K également éloigné des deux Points F, G : & la Droite qui passera par ce Point C ou K , & par le Point A , sera perpendiculaire sur le milieu de FG (N^o. 37.) ; puisqu'elle aura deux Points dont chacun sera également éloigné des extrémités de la Droite FG .

COROLLAIRE.

39 Ce Problème peut aussi servir à couper une Ligne droite FG en deux parties égales.

PROBLÈME.

Fig. 25, 26, 27, 28, & 29. 40 D'un Point donné B , tirer une Ligne qui soit perpendiculaire à une Droite FD .

SOLUTION.

Fig. 25 & 26. Du Point donné B comme Centre, on décrira un Arc FEG qui coupera la Droite FD en deux Points F, G , dont le Point donné B sera également éloigné (N^o. 12.). Ensuite on cherchera (N^o. 13.) un second Point A , qui soit encore également éloigné des deux Points F, G : & la Droite qu'on tirera par les deux Points A, B , sera perpendiculaire sur le milieu de FG (N^o. 37.) & par conséquent sur FD .

Fig. 27 & 28. Si la Perpendiculaire demandée doit tomber à l'extrémité de la Droite FD , l'Arc FEG , décrit du Point B comme Centre, ne pourra rencontrer la

Droite FD qu'en un seul Point F . Dans ce cas, on prolongera la Droite FD jusqu'à ce qu'elle rencontre l'Arc $FE G$ dans un second Point G ; puis on cherchera (N^o. 13.) un Point A également éloigné des deux Points F, G : & l'on mènera par les Points B, A , une Droite indéfinie BA , qui sera la Perpendiculaire demandée.

Si l'Arc décrit du Point donné B comme Centre ne peut pas rencontrer la Droite FD en deux Points, on pourra faire usage de la pratique suivante.

D'un Point quelconque G de la Droite FD , comme Centre, on décrira par le Point donné B un Arc BIA . Puis d'un autre Point E de la même Ligne FD , comme Centre, on décrira par le même Point B un second Arc BKA , qui rencontrera le premier Arc aux deux Points B, A , desquels chacun des deux Centres G, E , sera également éloigné. Ainsi en menant BA , la Droite FD lui sera perpendiculaire. (N^o. 37.); & par conséquent (N^o. 31.) BA sera perpendiculaire sur FD . Fig. 29.

Cette dernière Solution suppose que le Point donné B , par lequel il faut mener une Perpendiculaire, n'est pas dans la Droite FD sur laquelle la Perpendiculaire doit être tirée. Nous verrons plusieurs autres Pratiques pour mener des Perpendiculaires, à mesure que nous serons en état de les démontrer.

T H É O R È M E.

41 1^o. Une Droite AB , mené d'un point quelconque A , perpendiculairement à une Droite FG , est la plus courte de toutes les Lignes AB, AD, AF , &c qu'on peut mener du même Point A à la même Droite FG . Fig. 30.

2^o. De deux Obliques AD, AF , différemment éloignées de la Perpendiculaire AB , celle AF qui s'en écarte le plus est la plus longue.

30 Liv. I. Chap. III. DES PERPENDICULAIRES

Et réciproquement,

1°. Lorsqu'une Droite AB est la plus courte de toutes les Lignes qu'on peut mener du Point A à une Droite FG , elle est perpendiculaire à cette Droite FG .

2°. Lorsque deux Obliques AD , AF , qui partent d'un même Point A sont inégales, celle qui est la plus longue s'écarte le plus de la Perpendiculaire AB .

DÉMONSTRATION.

Soit prolongée la Perpendiculaire AB en H , de manière que l'on ait $BH = AB$; & soient tirées les Droites DH , FH .

Puisque (*hyp.*) AB est perpendiculaire sur FG , FG sera réciproquement perpendiculaire sur AB (N°. 31.); & comme on a fait $BH = AB$, FG se trouvera perpendiculaire sur le milieu de AH . Ainsi chaque point de la Droite FG sera également éloigné des deux extrémités de la Droite AH (N°. 33.).

On aura donc

$$\left. \begin{array}{l} AB = BH \text{ (construction)} \\ AD = DH \text{ (N°. 33.)} \\ AF = FH \text{ (N°. 33.)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{\& par} \\ \text{consé-} \\ \text{quent} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} AB = \frac{AH}{2} \\ AD = \frac{AD + DH}{2} \\ AF = \frac{AF + FH}{2} \end{array} \right.$$

Mais $AH < AD + DH$ (N°. 7.) & $AD + DH < AF + FH$ (N°. 9.).

Donc en prenant les moitiés de ces Quantités inégales, on aura

$$\frac{AH}{2} < \frac{AD + DH}{2}, \text{ \& } \frac{AD + DH}{2} < \frac{AF + FH}{2}$$

ou $AB < AD$, & $AD < AF$;

c'est-à-dire, que

1°. La Droite AB menée du Point A perpendiculairement sur FG , est plus courte que toute autre Ligne, telle que AD , menée du même Point A à la même Droite FG . Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

20. De deux Obliques AD , AF , différemment éloignées de la Perpendiculaire AB , celle AD qui s'en éloigne le moins est la plus courte, ou celle AF qui s'en éloigne le plus est la plus longue. Ce qu'il falloit 20. démontrer.

Et réciproquement, il suit de ces deux vérités que

10. Lorsqu'une Droite AB est la plus courte de toutes celles qu'on peut mener du Point A sur FG , elle est perpendiculaire à FG . Car nous venons de démontrer que si elle n'étoit pas perpendiculaire, elle ne seroit pas la plus courte qu'on peut mener du Point A sur FG . Ce qu'il falloit démontrer.

20. La plus longue de deux Obliques qui vont d'un même Point A à une même Droite FG , est toujours la plus écartée de la Perpendiculaire. Car nous venons de voir que si elle n'étoit pas la plus écartée, elle ne seroit pas la plus longue. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

42 Donc on ne peut mener qu'une seule Perpendiculaire AB d'un même Point A à une même Droite FG . Car nous venons de voir que la Perpendiculaire AB est la Ligne la plus courte qu'on puisse mener du Point A à la Droite FG ; & l'on ne peut mener du Point A à la Droite FG , qu'une Ligne qui soit la plus courte. Fig. 301

Il suit de là que deux Perpendiculaires AB , CD , à une même Droite FG , ne peuvent jamais se rencontrer, quelque loin qu'on les prolonge; parce que si elles se rencontroient en quelque Point, il y auroit deux Perpendiculaires de ce Point à la même Droite FG : ce qui est impossible. Fig. 311

COROLLAIRE II.

43 Donc si deux Obliques égales AF , AG , vont Fig. 301

32 *Liv. I. Chap. III. DES PERPENDICULAIRES*
 d'un même Point A à une même Droite FG , elles seront également éloignées de la Perpendiculaire AB ; parce que nous venons de voir (N^o. 41.) que si elles n'étoient pas également éloignées de la Perpendiculaire AB , elles ne seroient pas égales.

Et réciproquement, si deux Obliques AF , AG , qui partent d'un même Point A , s'éloignent également de la Perpendiculaire AB , elles seront égales. Car nous avons vû (N^o. 41.) que si l'une étoit plus longue que l'autre, elle seroit plus éloignée que l'autre de la Perpendiculaire AB . Cette conséquence a déjà été démontrée (N^o. 34.).

Il suit de la première partie de ce Corollaire, que si deux Droites égales AF , AG , vont d'un même Point A à une Droite FG , elles seront toutes deux obliques à la Droite FG ; & que la Perpendiculaire AB tombera entre elles sur le milieu de FG : & par conséquent, lorsqu'un Point A sera également éloigné des deux extrémités d'une Droite FG , la Perpendiculaire qu'on menera par ce Point A à la Droite FG , coupera FG en deux parties égales.

COROLLAIRE III.

Fig. 30. 44 Donc il est impossible de mener trois Lignes droites égales d'un même Point A à une même Ligne droite FG . Car il en faudroit tirer deux égales, telles que AD , AF , d'un même côté de la Perpendiculaire ; ce qui est impossible, puisque ces deux Lignes seroient différemment éloignées de la Perpendiculaire, & seroient par conséquent inégales, (N^o. 41.).

Trois Points d'une même Ligne droite FG , ne peuvent donc pas être également éloignés d'un même Point A .

Et comme tous les Points d'une même Circonférence

tence doivent être également éloignés d'un même Point qui leur sert de Centre (N^o. 12.), il est clair que trois Points d'une même Ligne droite ne peuvent pas appartenir à une même Circonférence. Ainsi une Ligne droite & une Circonférence ne peuvent pas se rencontrer en trois Points.

DÉFINITION.

45 Le chemin le plus court d'un Point à une Ligne s'appelle la *Distance* de ce Point à cette Ligne.

Mais la Perpendiculaire AB est le chemin le plus court d'un Point A à une Ligne Droite FG . Donc la Perpendiculaire AB , menée d'un Point A à une Ligne droite FG , est la Distance de ce Point à cette Ligne. Fig. 30.

CHAPITRE IV.

Des Lignes droites Parallèles.

Nous avons examiné dans les deux Chapitres précédens les principales propriétés du concours des Lignes droites en général. Nous allons voir dans celui-ci les propriétés qu'elles ont lorsqu'elles ne peuvent point se rencontrer.

Les Parallèles peuvent être définies de plusieurs manières; & toutes les Définitions qu'on en donnera seront bonnes, pourvu qu'on les fasse connoître par une propriété dont on puisse déduire toutes les autres.

On peut définir les Parallèles par la propriété qu'elles ont d'être partout également distantes, quelque longues qu'elles puissent être. On peut aussi les définir par quelque-une de leurs constructions. Nous

34 *Liv. I. Chap. IV. DES LIGNES DROITES*
prendrons ce dernier parti, & nous choisirons pour les définir leur construction la plus facile & la plus expéditive, qui est celle dont se servent ordinairement les Dessinateurs.

CONSTRUCTION ET DÉFINITION
DES PARALLÉLES.

Fig. 32. 46 Pour décrire aisément & promptement des Lignes parallèles, on prend une Equerre BAC , dont on fait glisser un côté AC le long d'une Regle immobile PQ , en tenant toujours l'Equerre appliquée sur le même Plan contre la Regle; & dans chaque position BAC, bac , de l'Equerre, on tire des Lignes droites AB, ab , le long du même côté de cette Equerre. Les deux Lignes droites AB, ab , ainsi tirées, se nomment *Parallèles*.

Il n'est pas nécessaire que le côté AB , le long duquel on tire les Parallèles AB, ab , dans les différentes positions de l'Equerre, soit perpendiculaire sur le côté AC qui glisse contre la Regle immobile; en sorte que si l'Equerre avoit un côté rectiligne BC oblique au côté AC , les Lignes BC, bc , qu'on tireroit le long du côté BC dans les différentes positions de l'Equerre, seroient aussi nommées *Parallèles*.

COROLLAIRE I.

47 Donc les Parallèles AB, ab , ou CB, cb , sont dans un même Plan, & sont également inclinées sur la Regle ou Directrice PQ . Car l'inclinaison des Parallèles AB, ab , sur la Directrice PQ , est égale à celle que le côté AB de l'Equerre BAC a sur le côté AC qui glisse le long de la Directrice. Il en est de même des deux autres Parallèles BC, bc .

On auroit pu, sans entrer dans le détail de la construction des Parallèles, les définir ainsi.

Deux Droites sont parallèles, lorsque dans un même Plan elles sont également inclinées d'un même côté sur une même Droite.

On reconnoîtra donc que deux Droites AB , CD , Fig. 33.
& 34. sont parallèles, lorsqu'étant coupées par une Droite FG qui peut leur servir de Directrice, les deux Angles AEI , CIG , qui mesurent leur inclinaison du même côté sur la Directrice FG , seront égaux.

COROLLAIRE II.

48 Lorsque deux Droites AB , CD , sont per- Fig. 34. pendiculaires à une même Droite FG , les Angles AEI , CIG , qu'elles forment d'un même côté avec la Droite FG , sont droits, & par conséquent égaux. Ainsi (N°. 47.) ces Perpendiculaires AB , CD , à la même Droite FG , sont parallèles.

COROLLAIRE III.

49 Si l'une AB des deux Parallèles AB , CD , est Fig. 34. perpendiculaire à la Directrice FG , l'autre Parallèle CD sera aussi perpendiculaire à FG . Car les Lignes AB , CD , étant parallèles, les Angles AEI , CIG , qu'elles forment d'un même côté avec la Directrice, sont égaux (N°. 47.). Mais AB étant perpendiculaire sur FG , les Angles AEI , AEF , sont droits. Donc les Angles CIG , CIF , sont droits aussi, & par conséquent égaux. Ainsi la Droite CD est perpendiculaire sur FG , aussi bien que sa Parallèle AB .

Donc deux Parallèles AB , CD , ne peuvent jamais se rencontrer, quelque loin qu'on les prolonge. Car si l'on tire une Droite FG , à laquelle l'une AB des deux Parallèles soit perpendiculaire, l'autre Parallèle CD sera aussi perpendiculaire à la même Droite FG . Ainsi les deux Parallèles AB , CD , qui sont dans un même Plan, seront perpendiculaires à la

36 Liv. I. Chap. IV. DES LIGNES DROITES
 même Droite FG , & par conséquent ne pourront
 pas se rencontrer, quelque loin qu'on les prolonge.
 (N^o. 42.).

T H É O R È M E.

Fig. 33. 50 Lorsque deux Parallèles AB , CD , sont coupées
 & 34 par une même Droite FG , elles ont les cinq propriétés
 suivantes.

1^o. Les Angles AEI , CIG , qu'on appelle *INTERNES
 EXTERNES D'UN MÊME CÔTÉ*, sont égaux.

2^o. Les Angles AEI , EID , qu'on appelle *ALTERNES
 INTERNES*, sont égaux.

3^o. Les Angles FEB , CIG , qui sont *ALTERNES
 EXTERNES*, sont égaux.

4^o. Les Angles AEI , CIE , qu'on nomme *INTERNES
 D'UN MÊME CÔTÉ*, valent ensemble deux Angles droits.

5^o. Les Angles AEF , CIG , qu'on nomme *EXTERNES
 D'UN MÊME CÔTÉ*, valent ensemble deux Angles droits.

D É M O N S T R A T I O N.

1^o. Les Droites AB , CD , étant parallèles, on
 aura l'Angle $AEI = CIG$ (N^o. 47.) : c'est une suite
 naturelle de leur construction.

2^o. Puisque les Lignes AB , CD , sont parallèles,
 on a $AEI = CIG$. Mais $CIG = EID$ (N^o. 30.).
 Donc $AEI = EID$.

3^o. $FEB = AEI$ (N^o. 30.). Mais $AEI = CIG$
 (N^o. 47.). Donc $FEB = CIG$.

4^o. CIG & CIE valent ensemble deux Angles
 droits (N^o. 21.). Mais $AEI = CIG$ (N^o. 47.). Donc
 en prenant AEI à la place de CIG , on trouvera que
 AEI & CIE valent ensemble deux Angles droits.

5^o. AEF & AEI valent ensemble deux Angles
 droits (N^o. 21.). Mais $AEI = CIG$ (N^o. 47.). Donc
 AEF & CIG valent ensemble deux Angles droits.

T H É O R È M E.

§ I Deux Droites AB, CD , tracées sur un même Plan seront parallèles, si lorsqu'on les coupe par une même Droite FG , elles ont une des cinq conditions suivantes dans les Angles qu'elles forment. Fig. 33.
& 34.

- 1°. Si l'Angle $AEI =$ l'Angle CIG .
- 2°. Si l'Angle $AEI =$ l'Angle EID .
- 3°. Si l'Angle $FEB =$ l'Angle CIG .
- 4°. Si AEI & CIE valent ensemble deux Droits.
- 5°. Si AEF & CIG valent ensemble deux Droits.

D É M O N S T R A T I O N.

1°. Si $AEI = CIG$, les deux Droites AB, CD , seront parallèles (N°. 47.).

2°. Par la seconde Hypothèse $AEI = EID$. Mais $EID = CIG$ (N°. 30.). Donc $AEI = CIG$. Ainsi (N°. 47.) les Droites AB, CD , sont parallèles.

3°. Par la troisième Hypothèse $FEB = CIG$. Mais $FEB = AEI$ (N°. 30.). Donc $AEI = CIG$. Ainsi (N°. 47.) les Droites AB, CD , sont parallèles.

4°. Par la quatrième Hypothèse $AEI + CIE =$ deux Droits. Ainsi AEI est Supplément de CIE (N°. 27.). Mais (N°. 27.) CIG est aussi Supplément de CIE . Donc $AEI = CIG$ (N°. 28.). Ainsi les Droites AB, CD , sont parallèles (N°. 47.).

5°. Par la cinquième Hypothèse AEF & CIG valent ensemble deux Droits. Ainsi CIG est Supplément de AEF (N°. 27.). Mais AEI est aussi Supplément de AEF (N°. 27.). Donc $AEI = CIG$ (N°. 28.). Ainsi les deux Lignes AB, CD , sont parallèles (N°. 47.).

CHAPITRE V.

*Des Lignes circulaires, & de leur rencontre entr'elles
& avec les Lignes droites.*

DÉFINITIONS.

Fig. 35. § 2 **N**OUS avons déjà dit (N^o. 12.) qu'un Plan renfermé par une Ligne $ABDEA$, dont tous les Points sont également éloignés d'un même Point C de ce Plan, s'appelle *Cercle*; que le Point C s'appelle *Centre*; que la Ligne $ABDEA$ s'appelle *Circonférence*; que chaque portion de la Circonférence s'appelle *Arc*; que toute Ligne droite telle que CA ou CB , tirée du Centre à la Circonférence, s'appelle *Rayon*; & que tous les Rayons d'un même Cercle sont égaux.

A ces Définitions nous ajouterons les suivantes.

Toute Droite, comme BD , dont les deux bouts sont à la Circonférence, se nomme *Corde*.

Une Corde AD , qui passe par le Centre, s'appelle *Diamètre*. Ainsi chaque Diamètre vaut deux Rayons; & par conséquent tous les Diamètres d'un même Cercle sont égaux.

Une Droite EF , qui touche le Cercle, c'est-à-dire, qui est appliquée contre la Circonférence, s'appelle *Tangente*.

L'Espace renfermé entre un Arc BGD & sa Corde BD , s'appelle *Segment*.

L'Espace renfermé entre un Arc AB & deux Rayons CA , CB , se nomme *Secteur*.

Toute Droite BH , menée d'un Point B de la Circonférence perpendiculairement sur un Diamètre AD , se nomme *Ordonnée* du Cercle par rapport à

ce Diamètre AD ; & les Parties AH , HD , du Diamètre, s'appellent les *Abscisses* de l'Ordonnée BH .

Toute Droite qui coupe le Cercle, se nomme en général *Sécante*.

COROLLAIRE I.

§3 Donc les Circonférences qui ont le même Centre C , ne peuvent pas se rencontrer sans se confondre en une même Circonférence. Car ou leurs Rayons sont égaux, ou ils sont inégaux. Fig. 36

1°. Si leurs Rayons sont égaux, tous les Points des deux Circonférences seront également éloignés de leur Centre commun C ; & ces deux Circonférences se confondront en une seule.

2°. Si leurs Rayons sont inégaux, la Circonférence qui aura le plus petit Rayon CA , tombera toute entière au dedans de celle qui aura le plus grand Rayon CB ; & par conséquent ces deux Circonférences ne se rencontreront pas.

COROLLAIRE II.

§4 Donc deux Circonférences qui se rencontrent ; n'ont pas le même Centre. Car si elles avoient même Centre, elles ne se rencontreroient pas (N°. 53.)

COROLLAIRE III.

§5 Donc les Cercles qui ont des Rayons égaux sont égaux. Car si l'on met le Centre de l'un sur le Centre de l'autre, les deux Cercles se confondront (N°. 53.).

Et réciproquement les Cercles qui sont égaux ont des Rayons égaux.

PROBLÈME.

Fig. 37. § 6 Faire passer la Circonférence d'un Cercle par trois Points donnés A, B, D , qui ne sont pas en Ligne droite.

SOLUTION.

Ayant joint les trois Points donnés par deux Droites AB, BD , on élèvera (N^o. 38.) sur leurs milieux des Perpendiculaires MN, OP ; & le Point C , où ces Perpendiculaires se rencontreront, sera le Centre du Cercle dont la Circonférence passera par les trois Points donnés A, B, D . Ainsi en ouvrant le Compas de la grandeur de AC , l'on décrira du Point C , comme Centre, avec cette ouverture, une Circonférence qui passera par les trois Points donnés A, B, D .

Car 1^o. MN étant Perpendiculaire sur le milieu de AB , le Point C de cette Perpendiculaire sera également éloigné de A & de B (N^o. 33.). 2^o. OP étant Perpendiculaire sur le milieu de BD , le Point C de cette Perpendiculaire sera également éloigné du Point B & du Point D (N^o. 33.). Donc le Point C , sera également éloigné des trois Points A, B, D , & sera par conséquent le Centre de la Circonférence qui passera par ces trois Points (N^o. 12 & 52.).

THÉORÈME.

Fig. 38, 39 & 40. § 7 De toutes les Droites AB, AD, AE , qu'on peut mener à la Circonférence d'un Cercle, d'un Point A qui n'en est pas le Centre, soit que ce Point A se trouve sur la Circonférence, soit qu'il se trouve au dedans ou au dehors du Cercle,

1^o. La Droite AB , qui passe par le Centre C , est la plus longue,

2^o. De deux Droites AD , AE , qui ne passent pas par le Centre, celle AD , dont l'Extrémité D est la plus proche du bout B de celle qui passe par le Centre, est la plus longue.

Et réciproquement

1^o. Lorsqu'une Droite AB , menée d'un Point A qui n'est pas le Centre, à la Circonférence, est la plus longue de toutes celles qu'on peut mener du même Point A à la Circonférence, elle passe toujours par le Centre.

2^o. Lorsque deux Droites inégales AD , AE , ne passeront ni l'une ni l'autre par le Centre C du Cercle, celle AD qui sera la plus longue aura son extrémité D la plus proche du bout B de celle qui passe par le Centre.

DÉMONSTRATION.

Soient tirés les Rayons CD , CE , aux extrémités des Droites AD , AE , qui ne passent pas par le Centre.

On aura 1^o. $CB = CD$; & ajoutant AC , l'on aura $AB = AC + CD$. Mais (N^o. 7.) $AC + CD > AD$. Donc aussi $AB > AD$. On démontrera de la même manière que $AB > AE$; c'est-à-dire, que la Droite AB , qui passe par le Centre, est plus longue que toute autre Ligne AD ou AE menée du même Point A à la Circonférence. Ce qu'il falloit 1^o. démontrer.

On aura 2^o. $CD = CE$. Mais $CQ + OD > CD$ (N^o. 7.). Donc aussi $CO + OD > CE$. Otant OC de chaque membre, il restera $OD > OE$. Ajoutant AO à chacun, l'on aura $AO + OD$ ou $AD > AO + OE$.

Mais $AO + OE > AE$ (N^o. 7.).

Donc à plus forte raison (Ax. XI.) $AD > AE$: c'est-à-dire, que de deux Droites AD , AE , qui ne passent point par le Centre, celle AD , dont l'extrémité est la plus proche du bout B de celle qui

42 *Liv. I. Chap. V. DES LIGNES*
passe par le Centre, est la plus longue. *Ce qu'il falloit*
2°. démontrer.

Et réciproquement

1°. Puisque nous venons de voir qu'une Droite qui ne passe point par le Centre, n'est pas la plus longue de toutes les Lignes qu'on peut mener du même Point *A*, qui n'est pas le Centre, à la Circonférence, il est évident qu'une Droite *AB* passera par le Centre *C* du Cercle, lorsqu'elle sera la plus longue de toutes celles qu'on peut mener du Point *A* à la Circonférence. *Ce qu'il falloit* 1°. démontrer.

2°. La plus longue de deux Droites *AD*, *AE*, menées du Point *A*, qui n'est pas le Centre, à la Circonférence, doit avoir son extrémité la plus proche du bout *B* de celle qui passe par le Centre; autrement celle dont l'extrémité est la plus proche du bout *B* de la Droite qui passe par le Centre, ne seroit pas la plus longue: ce qui seroit contraire à ce que nous avons démontré.

COROLLAIRE I.

Fig. 41,
42 & 43.

58 Lorsque deux Droites *AD*, *AG*, menées d'un même Point *A*, qui n'est pas le Centre, à la Circonférence, sont égales, leurs extrémités *D*, *G*, s'approchent également du bout *B* de la Droite *AB* qui passe par le Centre; c'est-à-dire, que les Arcs *BD*, *BG*, sont égaux. Car si les extrémités des Droites *AD*, *AG*, ne s'écartoient pas également du bout *B* de la Droite qui passe par le Centre, elles ne seroient pas égales (N°. 57.).

Et réciproquement

Deux Droites *AD*, *AG*, tirées d'un même Point *A*, qui n'est pas le Centre, à la Circonférence, sont égales, lorsque leurs extrémités s'éloignent également de l'extrémité *B* de la Droite qui passe par le

Centre. Car si ces Droites AD , AG , n'étoient pas égales, nous avons vû (N^o. 57.) que leurs extrémités seroient différemment éloignées du Point B .

COROLLAIRE II.

59 Donc il est impossible de mener trois Droites égales d'un même Point A , qui n'est pas le Centre, à la Circonférence. Car il faudroit en placer deux égales d'un même côté de la Droite AB qui passe par le Centre : ce qui est impossible ; puisque deux Droites AD , AE , tirées d'un même côté de la Droite qui passe par le Centre, auroient leurs extrémités différemment éloignées du bout de cette Ligne, & seroient par conséquent inégales (N^o. 57.).

Fig. 38,
39 & 40.

Il suit de là que trois Points d'une même Circonférence ne peuvent pas être également éloignés d'un même Point A qui n'est pas son Centre ; & que trois Points d'une même Circonférence qui auroit le Point C pour Centre, ne peuvent pas appartenir à une autre Circonférence qui auroit le Point A pour Centre.

Donc deux Circonférences $F B D F$, $E B D E$, ne peuvent pas se rencontrer en trois Points.

Fig. 44
& 45.

COROLLAIRE III.

Pour les Cordes d'un même Cercle ou de Cercles égaux.

60 1^o. Le Diamètre AB est la plus longue de toutes les Cordes (N^o. 57.) ; car il passe par le Centre C ; & réciproquement la plus longue de toutes les Cordes est le Diamètre (N^o. 57.).

Fig. 46.

2^o. De deux Arcs inégaux $A E D$, $A E$, moindres chacun que le Demi-cercle, pris dans le même Cercle ou dans des Cercles égaux, le plus grand $A E D$ aura la plus grande Corde ; c'est-à-dire, que

Si l'Arc $AED > l'Arc AE$, on aura la Corde $AD > la Corde AE$ (N^o. 57.).

3^o. De deux Cordes inégales AD, AE , prises dans un même Cercle ou dans des Cercles égaux, la plus grande AD soutient le plus grand Arc; c'est-à-dire, que si la Corde $AD > la Corde AE$, on aura $l'Arc AED > l'Arc AE$.

4^o. Si les Cordes AD, AG , sont égales, leurs Arcs AED, AHG , seront égaux.

On aura souvent besoin dans la suite de ce Traité de faire un Arc égal à un autre. Or on voit évidemment que pour cela il n'y aura qu'à prendre la Corde du premier Arc, ou l'intervalle qui est entre ses extrémités; & en quelque endroit du même Cercle, ou d'un Cercle égal, qu'on porte cet intervalle, on formera un Arc égal au premier.

5^o. Si les Arcs AED, AHG , sont égaux, les Cordes AD, AG , seront égales (N^o. 58.).

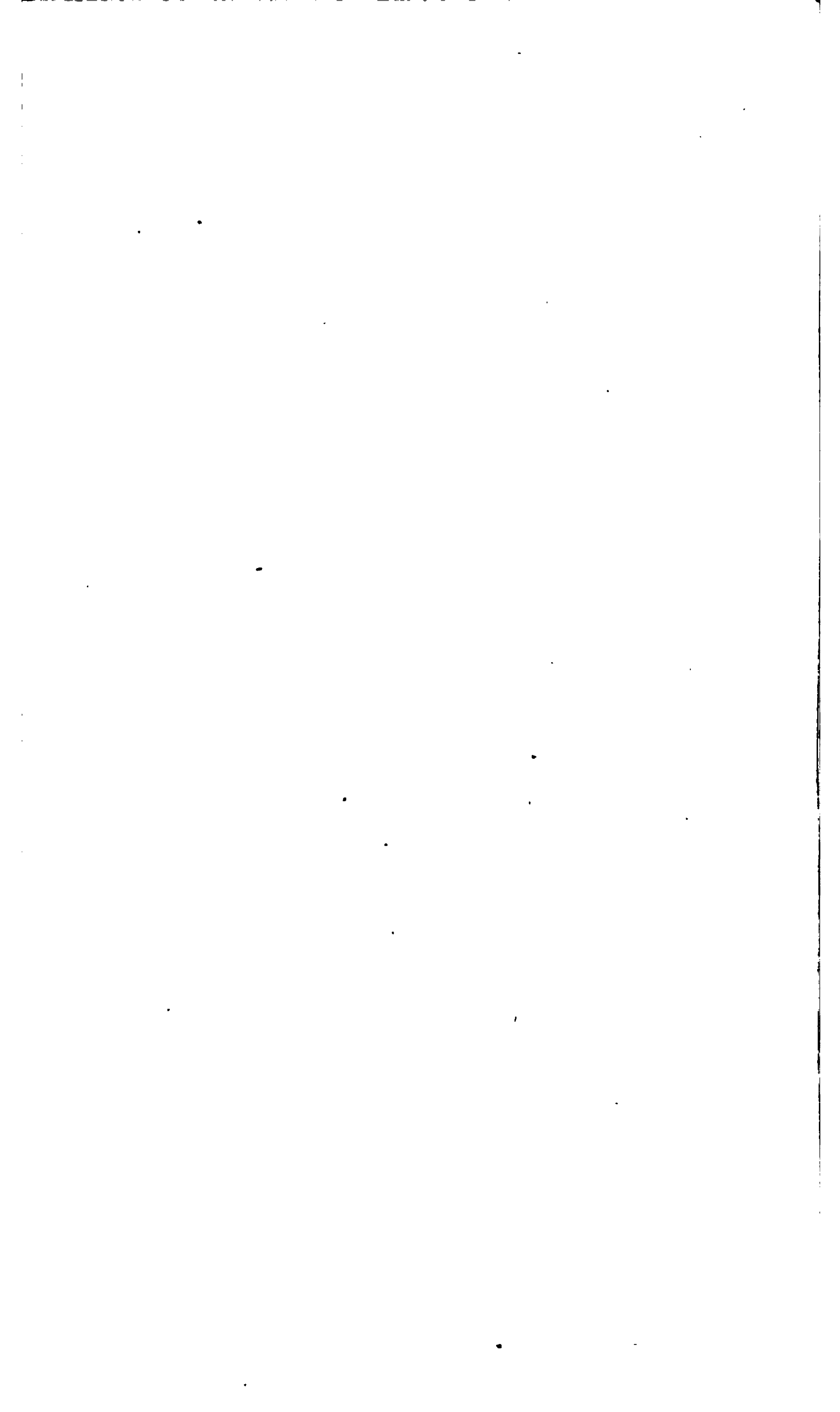
Fig. 47. 6^o. Donc le milieu d'un Arc est également éloigné de ses deux extrémités; c'est-à-dire, que si le Point A divise l'Arc DAG en deux parties égales, le Point A sera également distant des Points D, G . Car les Cordes AD, AG , seront égales.

T H É O R È M E.

Fig. 38 & 40. 61 1^o. De toutes les Droites qu'on peut mener d'un Point A qui n'est pas le Centre, à la Circonférence, celle AM dont le prolongement passe par le Centre C est la plus courte.

Et réciproquement

2^o. Lorsqu'une Droite AM est la plus courte de toutes celles qu'on peut mener d'un Point A , qui n'est pas le Centre du Cercle, à la Circonférence, son prolongement passe toujours par le Centre C du Cercle.



DÉMONSTRATION.

1^o. Pour démontrer que la Droite AM est la plus courte, il suffit de faire voir que toute autre Droite AN qu'on mènera du même Point A à la Circonférence, & dont le prolongement ne passera pas par le Centre, sera plus longue que AM .

Soit tiré le Rayon CN .

Si le Point A est au dedans du Cercle, on aura *Fig. 38.* $NA + AC > NC$ (N^o. 7.). Mais $NC = MC$. Donc $NA + AC > MC$: & retranchant AC de part & d'autre, on aura (Ax. X.) $AN > AM$. Ce qu'il falloit démontrer.

Si le Point A est hors du Cercle, on aura *Fig. 40.* $AN + NC > AC$: & retranchant le Rayon NC d'une part & le Rayon MC de l'autre, on aura (Ax. X.) $AN > AM$. Ce qu'il falloit 1^o. démontrer.

Et réciproquement

2^o. Si la Droite AM est la plus courte de toutes celles qu'on peut tirer d'un même Point A à la Circonférence, le prolongement de cette Droite passera par le Centre C . Car si son prolongement ne passoit pas par le Centre C , nous venons de voir qu'elle ne seroit pas la plus courte. Ce qu'il falloit 2^o. démontrer.

THÉORÈME.

62 Une Droite FG qui rencontre une Circonférence *Fig. 48.* en deux Points A & B , coupe le Cercle.

DÉMONSTRATION.

Soient tirés deux Rayons CA , CB , aux deux Points A & B où la Circonférence est rencontrée par la Droite FG . Ces deux Rayons étant égaux, ne sont ni l'un ni l'autre perpendiculaires à FG , mais

sont des Obliques également éloignées de la Perpendiculaire tirée du Centre C (N^o. 43.). Ainsi la Perpendiculaire CD tirée du Centre tombera au milieu de AB . Mais cette Perpendiculaire CD est plus courte que les Rayons CA ou CB ; & toutes les Droites tirées du Centre C entre A & B seront plus courtes que les mêmes Rayons CA , CB (N^o. 41.). Donc tous les Points de la Droite AB contenus entre A & B sont au dedans du Cercle.

Toutes les Droites qu'on tirera du Centre C , entre A & F ou entre B & G , sur FG , seront plus longues que les Rayons CA , CB (N^o. 41.). Ainsi les parties AF , BG , de la Droite FG , sont hors du Cercle.

Donc la Droite FG , qui rencontre la Circonférence en deux Points, entre dans le Cercle & en sort, & par conséquent coupe le Cercle. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Fig. 49. 63 Donc une Tangente FG ne rencontre la Circonférence qu'en un seul Point E . Car si elle rencontroit la Circonférence en deux Points, elle couperoit le Cercle (N^o. 62.) & ne seroit pas Tangente.

COROLLAIRE II.

Fig. 49. 64 La Droite CE , qu'on mènera du Centre au Point d'attouchement E , ne sortira point du Cercle pour aller jusqu'à la Tangente; & toute autre Droite, comme CD , tirée du Centre, qui n'ira pas au Point d'attouchement, sera obligée de sortir du Cercle pour arriver à la Tangente. D'où il suit que 1^o. La Droite CE , menée du Centre au Point d'attouchement, sera la plus courte de toutes les Lignes qu'on peut mener

du Centre à la Tangente, & sera par conséquent perpendiculaire à cette Tangente (N^o.41.). 2^o. Que toute Ligne CD menée par le Centre, qui n'ira pas au Point d'attouchement, ne sera pas la plus courte qu'on puisse mener du Centre à la Tangente, & par conséquent ne sera pas perpendiculaire à cette Tangente.

COROLLAIRE III.

65 Donc une Droite CE qu'on mènera par le Centre C perpendiculairement sur une Tangente FG , passera par le Point d'attouchement; car autrement elle ne seroit pas perpendiculaire. Fig. 491

Ce Corollaire donne la solution du Problème où l'on propose de déterminer le Point où une Tangente rencontre la Circonférence d'un Cercle.

COROLLAIRE IV.

66 Puisque le Rayon CE , mené du Centre au Point d'attouchement, est perpendiculaire à la Tangente FG , la Tangente FG sera réciproquement perpendiculaire au bout du Rayon CE qui va au Point d'attouchement.

COROLLAIRE V.

67 Et réciproquement la Droite FG , qu'on mènera perpendiculairement au bout du Rayon CE , touchera le Cercle au Point E . Fig. 492

Car si cette Perpendiculaire FG ne touchoit pas le Cercle au Point E , la Droite qui toucheroit le Cercle au Point E ne seroit pas perpendiculaire au bout E du Rayon: ce qui seroit contradictoire au Corollaire précédent.

Ce Corollaire fournit un moyen facile de mener une Tangente à un Point donné d'une Circonférence.

THÉORÈME.

Fig. 50. 68 Si la Droite AE est perpendiculaire sur le milieu de la Corde FG , je dis que
 1°. Elle passera par le Centre.
 2°. Elle divisera l'Arc FEG en deux Parties égales.

DÉMONSTRATION.

Tout Point qui sera également éloigné des deux bouts de la Droite FG , sera dans la Perpendiculaire AB (N°. 36.).

Mais 1°. le Centre C est également éloigné des deux extrémités F, G , qui sont dans la Circonférence (N°. 12.). Donc le Centre est dans la Perpendiculaire AB ; & par conséquent cette Perpendiculaire passe par le Centre C . Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Le milieu E de l'Arc FEG est également éloigné de ses extrémités F, G (N°. 60.). Ainsi la Perpendiculaire AB passera aussi par ce milieu E , & coupera par conséquent l'Arc FEG en deux parties égales. Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

Fig. 51. Ce Théorème donne la solution de deux Problèmes. La première partie fournit un moyen facile pour trouver le Centre C d'un Cercle ou d'un Arc proposé ABD : puisque si l'on mène dans cet Arc deux Cordes AB, BD , & qu'on élève sur leurs milieux des Perpendiculaires MN, OP , chacune de ces Perpendiculaires passera par le Centre; & par conséquent elles détermineront ce Centre par leur Point d'intersection.

La seconde partie donne le moyen de diviser un Arc en deux parties égales.

COROLLAIRE I.

Fig. 50. 69 Puisque (N°. 68.) une Droite AE , perpendiculaire

diculaire au milieu de la Corde FG , passe par le Centre C , & divise l'Arc FEG en deux parties égales, il est clair que le milieu B d'une Corde FG , le milieu E de son Arc FEG , & le Centre C du Cercle, sont en Ligne droite; & qu'une Ligne droite menée par deux de ces trois Points B, E, C , passera nécessairement par le troisième, & sera en même temps perpendiculaire au milieu de la Corde FG : c'est-à-dire, que

1°. Si la Droite AE passe par le Centre C & par le milieu B de la Corde FG , elle divisera l'Arc FEG en deux parties égales, & sera perpendiculaire au milieu de la Corde FG .

2°. Si la Droite AE passe par le Centre C & par le milieu E de l'Arc FEG , elle sera perpendiculaire sur le milieu B de la Corde FG .

3°. Si la Droite AE divise la Corde FG & son Arc FEG en deux parties égales, elle passera par le Centre, & sera perpendiculaire au milieu de la Corde FG .

COROLLAIRE II.

70 Comme on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire au milieu de la Corde FG (N°. 18.), & que cette perpendiculaire passera par le Centre C & par le milieu E de l'Arc FEG (N°. 68.), il est évident qu'une Ligne qui sera perpendiculaire à la Corde FG , & qui passera par l'un des trois Points B, E, C , passera nécessairement par les deux autres: c'est-à-dire, que

Fig. 507

1°. Si la Droite AE est perpendiculaire sur la Corde FG , & divise son Arc FEG en deux parties égales, elle passera par le Centre C & par le milieu B de la Corde FG .

2°. Si la Droite AE est perpendiculaire à la Cor-

Géom.

D *

50 *Liv. I. Chap. V. DES LIGNES*
 de FG , & passe par le Centre C , elle divisera cette
 Corde & son Arc en deux parties égales.

COROLLAIRE III.

Fig. 52. 71 Donc deux Arcs AF , BG , sont égaux, lorsqu'ils sont compris entre deux Cordes parallèles AB , FG . Car si du Centre C l'on tire la Droite CE perpendiculairement sur AB , elle sera perpendiculaire aux deux Parallèles AB , FG . Ainsi (N^o. 70.) elle passera par les milieux des deux Arcs AEB , FEG ; c'est-à-dire, que le Point E , où cette Droite rencontrera la Circonférence, sera en même temps le milieu de l'Arc AEB , & de l'Arc FEG . On aura donc l'Arc $AFE =$ l'Arc BGE , & l'Arc $FE =$ l'Arc GE . Donc en retranchant la seconde Égalité de la première, on aura l'Arc $AF =$ l'Arc BG .

Et réciproquement, lorsque deux Arcs AF , BG , d'un même Cercle, compris entre deux Cordes AB , FG , sont égaux, ces Cordes sont parallèles. Car si l'on mène un Rayon CE au milieu E de l'Arc FEG , ce Rayon sera perpendiculaire à la Corde FG (N^o. 69.). Mais E sera aussi le milieu de l'Arc $AFEGB$. Ainsi le Rayon CE sera encore perpendiculaire à la Corde AB (N^o. 69.). Le même Rayon CE sera donc perpendiculaire aux deux Cordes AB , FG : d'où il suit (N^o. 31.) que ces deux Cordes seront perpendiculaires à la même Droite CE , & seront par conséquent parallèles (N^o. 48.).

72 Ce Corollaire donne le moyen de mener par un Point donné une Parallèle à une Ligne donnée. Car si l'on propose de mener par le Point F une Parallèle à la Droite AB , d'un Point quelconque C pris pour Centre, on décrira par le Point F un Arc $AFEGB$ qui coupera la Droite AB en deux Points A & B ; puis faisant l'Arc BG égal à l'Arc AF , on mènera par le Point G & par le Point donné F la Parallèle demandée FG .

COROLLAIRE IV.

73 Donc deux Arcs AE , BE , sont égaux, lorsqu'ils sont compris entre une Corde AB & une Tangente FG , qui sont parallèles. Car si l'on tire le Rayon CE au Point d'attouchement E , il sera perpendiculaire sur la Tangente FG (N^o. 64.) ; & il sera aussi perpendiculaire sur la Corde parallèle AB (N^o. 49.) : & par conséquent il divisera l'Arc AEB en deux parties égales. Donc le Point d'attouchement E d'une Tangente parallèle à une Corde AB , divise l'Arc AEB en deux parties égales. Fig. 53.

THÉORÈME.

74 1^o. Deux Circonférences qui se coupent ne se rencontrent qu'en deux Points.

2^o. Et réciproquement deux Circonférences qui se rencontrent en deux Points B & D , se coupent.

DÉMONSTRATION.

1^o. Deux Circonférences ne peuvent jamais se rencontrer en trois Points sans se confondre (N^o. 59.). Ainsi deux Circonférences qui se coupent ne peuvent se rencontrer qu'en deux Points, savoir, au Point d'entrée de l'une dans l'autre, & au Point de sortie. Ce qu'il falloit 1^o. démontrer. Fig. 54.

2^o. Du Centre A de l'un des Cercles, soient tirés les Rayons AB , AD , aux Points où les Circonférences se rencontrent. Ces deux Droites AB , AD , étant égales, aucune des deux ne passera par le Centre C de l'autre Cercle BGE ; mais elles aboutiront à des Points B & D également distants de l'extrémité E de la Droite AE qui passe par le Centre C de ce Cercle (N^o. 58.). Qu'on imagine présentement

une infinité de Droites tirées du même Point A à tous les Points de la Circonférence $BGDEB$. Toutes les Droites qui iront aboutir à l'Arc BGD seront plus courtes que les Rayons AB, AD , (N^o. 57.); & celles qui aboutiront à l'Arc BED seront plus longues que les Rayons AB, AD (N^o. 57.). Donc l'Arc BGD est au dedans du Cercle $FBDF$, & l'Arc BED est au dehors du même Cercle $FBDF$: & par conséquent les deux Cercles $FBDF, BGDEB$, qui se rencontrent en deux Points, se coupent. Ce qu'il falloit 2^o. démontrer.

COROLLAIRE I.

Fig. 55 & 56. 75 Donc deux Circonférences X & Z qui se touchent, ne se rencontrent qu'en un Point E . Car si elles se rencontroient en deux Points, elles se couperoient.

COROLLAIRE II.

Fig. 55 & 56. 76 Donc la Droite AE , tirée du Centre A du Cercle X au Point d'attouchement des deux Cercles, est la plus courte de toutes les Droites qu'on puisse mener du Point A à la Circonférence du Cercle Z . Car le Point E étant le seul qui appartienne aux deux Cercles X & Z , toute autre Ligne, comme AB , qu'on pourroit tirer du même Centre A à la Circonférence du Cercle Z , sortira du Cercle X pour aller au Cercle Z ; & fera par conséquent plus longue que le Rayon AE du Cercle X .

COROLLAIRE III.

Fig. 55 & 56. 77 Donc si l'on prolonge la Droite AE , tirée du Centre A du Cercle X au Point d'attouchement E des deux Cercles, le prolongement passera par le Centre C de l'autre Cercle Z (N^o. 61.). Car elle est

la plus courte qu'on puisse tirer du Point *A* au Cercle *Z* : & par conséquent lorsque deux Cercles se touchent, les deux Centres & le Point d'attouchement sont en Ligne droite.

1°. On déterminera donc suivant ce Corollaire le Point *E* Fig. 55.
où deux Cercles se touchent, en menant une Ligne droite *AC* & 56.
par les Centres *A* & *C* de ces deux Cercles.

2°. Le même Corollaire donne aussi le moyen de décrire un Cercle ou une portion de Cercle qui touche un autre Cercle en un Point donné. Car si l'on mène une Ligne droite par le Centre du Cercle donné & par le Point d'attouchement, il est évident que le Centre de l'autre Cercle doit être dans la même Ligne.

Cette dernière opération est d'un grand usage pour composer différentes Courbes, avec des portions d'un même Cercle ou de différens Cercles qui se touchent, de manière que la Courbe composée paroisse n'être qu'une seule & même Courbe. Nous en avons des exemples dans différentes Courbes ou Moulures employées par les Architectes.

La DOUCINE & le TALON *EDC* sont des Courbes Fig. 57.
qui ont un Point d'inflexion *D*, & qui sont composées & 58.
de deux Arcs de Cercle qui se touchent à ce Point d'inflexion. Ainsi les Centres *A*, *B*, des deux Arcs *ED*, *DC*, & le Point d'attouchement *D* de ces deux Arcs, doivent être dans une même Ligne droite *ADB*.

Les ANSES DE PANIERS, qui ressemblent à des Demi- Fig. 59.
ellipses, sont composés de trois Arcs de Cercles, dont celui *DF* du milieu est touché à ses extrémités *D*, *F*, par les deux autres *ED*, *FG*. Ainsi le Centre *A* de l'Arc *DE*, le Centre *B* de l'Arc *DF*, & leur Point d'attouchement *D*, par lequel se joignent ces deux Arcs, sont dans une même Ligne droite *DB*. De même le Centre *B* de l'Arc *DF*, le Centre *C* de l'Arc *FG*, & le Point d'attouchement *F* où se joignent ces deux Arcs, sont dans une même Ligne droite *FB*.

Fig. 60. Les *VOULTES*, qui ressemblent aux *Spirales*, sont composées de plusieurs Arcs ED, DF, FG, qui se succèdent & qui se touchent aux Points où ils s'unissent. Ainsi le Centre A du premier Arc ED, le Centre B du second DF, & le Point d'attouchement D où se joignent ces deux Arcs, sont dans la même Ligne droite DB. De même le Centre B de l'Arc DF, le Centre C de l'Arc suivant FG, & le Point d'attouchement F de ces deux Arcs, sont dans une même Droite BF. Il en sera de même des autres Arcs qui se succéderont, & qui paroîtront ne faire avec les Arcs précédens qu'une même Courbe non interrompue.

CHAPITRE VI.

De la division de la Circonférence du Cercle, & de son usage dans la mesure des Angles.

78 LES Mathématiciens sont convenus de diviser toutes les Circonférences en 360 parties égales, & d'appeler *Degré* chacune de ces parties. Ainsi

La Circonférence de tout Cercle, grand ou petit, contient 360 Degrés.

La Demi-circonférence contient 180 Degrés.

Le Quart de la Circonférence contient 90 Degrés, & se nomme quelquefois *Quart de nonante*.

Le Degré se partage en 60 parties égales appelées *Minutes premières* ou simplement *Minutes*.

La Minute se divise en 60 parties égales appelées *Minutes secondes* ou simplement *Secondes*.

On sous-divise la Seconde en 60 *Tierces*, la Tierce en 60 *Quartes*, la Quarte en 60 *Quintes*; & ainsi de suite.

DE LA CIRCONFÉRENCE DU CERCLE, &c. 55

Le Degré se distingue par $^{\circ}$, ou par d qui est la lettre initiale de *degré*, ou par g qui est la lettre initiale du mot *Gradus* lequel signifie *Degré*; la Minute par $'$, la Seconde par $''$, la Tierce par $'''$; la Quarte par $''''$ ou par iv , la Quinte par v . Ces caracteres s'écrivent à la droite du nombre un peu au-dessus. Par exemple,

Pour exprimer $\left\{ \begin{array}{l} 90 \text{ Degrés} \\ 45 \text{ Minutes} \\ 30 \text{ Secondes} \\ 45 \text{ Tierces} \end{array} \right\}$ on écrit $\left\{ \begin{array}{l} 90^{\circ} \\ 45' \\ 30'' \\ 45''' \end{array} \right\}$

COROLLAIRE I.

79 Donc si une Droite AC en se mouvant autour d'un Point C fait une révolution entiere dans un Plan, de maniere qu'elle revienne dans la situation AC d'où elle est partie, chacun de ses Points M, O, P , décrira une Circonférence entiere dont C sera le Centre. Ainsi chaque Point M, O, P , décrira 360° . Fig. 61.

Mais si la Droite AC ne fait que la trois cent-soixantième partie d'une révolution, chaque Point M ou O ou P de cette Ligne ne décrira que la 360° partie d'une Circonférence, & par conséquent ne tournera que d'un Degré.

Donc enfin chaque Point M ou O ou P de la Droite AC décrira autant de Degrés, que la Droite AC fera de fois la 360° partie d'une révolution autour du Point immobile C .

COROLLAIRE II.

80 Donc si l'on prend pour Centre le Sommet C d'un Angle ACB , & qu'on décrive un Arc MQ entre les côtés de cet Angle, cet Arc MQ exprime, Fig. 61.

ra par le nombre de ses Degrés, minutes & secondes; la quantité dont un côté AC aura tourné pour s'écarter de l'autre côté BC , & former l'Angle ACB .

Nous avons dit (*Nº. 14.*) qu'un Angle n'est autre chose que l'ouverture de deux Droites AC , BC , qui se rencontrent en un même point C ; & nous avons fait remarquer (*Nº. 15.*) que la grandeur d'un Angle ne dépend pas de la longueur de ses côtés, mais seulement de la quantité dont ils ont tourné sur leur Sommet C , pour s'écarter l'un de l'autre, & former l'ouverture qui est entr'eux. Il faut donc estimer la grandeur d'un Angle par la quantité dont ses côtés ont tourné pour s'ouvrir, ou s'écarter l'un de l'autre; & comme les Arcs de Cercles sont commodes pour exprimer la quantité de cette rotation, c'est par le moyen du Cercle ou de sa Circonférence que nous allons mesurer les Angles.

Comme un Angle peut avoir quatre situations différentes par rapport au Cercle, qu'il peut avoir son Sommet au Centre, ou dans la Circonférence, ou entre le Centre & la Circonférence, ou enfin au dehors du Cercle, nous emploierons quatre Théorèmes pour démontrer les mesures des Angles dans ces quatre situations.

T H É O R È M E.

Fig. 61. **81** *Un Angle ACB , qui a son Sommet au Centre d'un Cercle, a pour mesure l'Arc MQ compris entre ses côtés.*

D É M O N S T R A T I O N.

Puisque l'Angle ACB a son Sommet au Centre C du Cercle, l'Arc MQ compris entre ses côtés exprime

mera par le nombre de ses Degrés, minutes & secondes, la quantité dont un côté AC aura tourné pour s'écarter de l'autre côté BC , & former l'ouverture qui est entr'eux. Ainsi l'Arc MQ peut être regardé comme la mesure de l'ouverture de l'Angle ACB .

Mais l'Angle ACB n'est autre chose que l'ouverture de ses côtés AC , BC (N^o. 14.).

Donc l'Angle ACB , qui a son Sommet au Centre C d'un Cercle, a pour mesure l'Arc MQ compris entre ses côtés. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

82 Donc si deux Angles égaux ACB , DCE , ont le Fig. 62.
Sommet au Centre d'un Cercle, les Arcs MQ , PR , compris entre leurs côtés, seront égaux. Car ces Arcs sont les mesures de ces Angles; & les Angles égaux ont des mesures égales.

Et réciproquement, deux Angles sont égaux, quand ils ont leurs Sommets au Centre d'un même Cercle ou de Cercles égaux, & qu'ils comprennent entre leurs côtés des Arcs égaux; ou lorsqu'ils ont leurs Sommets aux Centres de différens Cercles, & qu'ils comprennent entre leurs côtés des Arcs d'un même nombre de Degrés.

Ce Corollaire donne le moyen de mener au Point c Fig. 63
d'une Ligne cb une Droite ac qui fasse un Angle acb & 64.
égal à un Angle donné ACB . Car si du Sommet C de l'Angle donné ACB , comme Centre, on décrit entre ses côtés un Arc MQ , & qu'après avoir décrit du Point donné c comme Centre, avec la même ouverture de Compas, un Arc $m q$ qui rencontre cb en q , on fasse l'Arc $m q = MQ$, & qu'on tire la Droite $cm a$, l'Angle acb sera égal à l'Angle donné ACB ; puisque ces deux Angles

58 *Liv. I. Chap. VI. DE LA MESURE*
 auront leurs Sommets aux Centres de deux Cercles égaux ;
 & comprendront entre leurs côtés des Arcs égaux.

Lorsqu'on fait mener à un Point donné une Ligne qui fasse avec une Ligne donnée un Angle égal à un autre
 Fig. 65. Angle, on est en état de mener par un Point donné A une Parallèle AD à une Droite MN donnée de position. Car après avoir mené par le Point A une Droite AC qui fasse avec MN un Angle ACM, si l'on tire par le même Point A une Droite AD qui fasse avec AC un Angle DAC égal à l'Angle ACM, la Droite AD sera parallèle à MN (N^o. 51.).

Fig. 66. Puisqu'on fait (N^o. 68.) diviser un Arc en deux parties égales, on est maintenant en état de diviser un Angle quelconque ACB en deux parties égales. Car si du Sommet C de l'Angle qu'on veut diviser, comme Centre, on décrit un Arc MQ entre les côtés de cet Angle, & qu'on mène par le même Sommet C une Droite CE qui divise cet Arc MQ en deux parties égales, cette Droite CE divisera aussi l'Angle ACB en deux parties égales ACE, BCE; puisque ces deux Angles ACE, BCE, auront leur Sommet C au Centre de l'Arc MQ, & comprendront chacun la moitié de l'Arc MQ.

COROLLAIRE II.

Fig. 67. 83 Donc un Angle Droit ACB a pour mesure un Quart de Circonférence ou 90 Degrés. Car si du Point C comme Centre, où se croisent deux Droites AE, BD, perpendiculaires l'une à l'autre, on décrit une Circonférence MQPR, les quatre Angles droits ACB, BCE, ECD, DCA, auront pour mesures les quatre Arcs MQ, QP, PR, RM. Mais les quatre Angles droits sont égaux; ainsi les quatre Arcs qui leur servent de mesure sont aussi égaux: & comme ces quatre Arcs composent ensemble la Circonférence entière, chacun d'eux n'en vaut que

le quart. D'où il suit que chaque Angle droit a pour mesure un Quart de Cercle ou 90 Degrés.

COROLLAIRE III.

84 Puisqu'un Angle aigu est plus petit qu'un Angle droit, il aura pour mesure un Arc plus petit qu'un Quart de Cercle, & vaudra par conséquent moins que 90 Degrés.

COROLLAIRE IV.

85 Donc un Angle obtus a pour mesure un Arc plus grand qu'un Quart de Cercle, & vaut par conséquent plus que 90 Degrés; puisqu'il est plus grand qu'un Angle droit.

COROLLAIRE V.

86 Et réciproquement, un Angle est droit, quand il a pour mesure un Quart de Cercle ou 90 Degrés; un Angle est aigu, quand il a pour mesure un Arc moindre que le Quart de Cercle ou que 90 Degrés; un Angle est obtus, quand il a pour mesure un Arc plus grand que le Quart de Cercle, ou qu'il vaut plus que 90 Degrés.

COROLLAIRE VI.

87 Comme deux Angles de suite valent ensemble deux Angles droits, ils auront ensemble pour mesure un Demi-cercle ou 180 Degrés.

Avertissement.

Comme deux Angles qui valent ensemble deux Droits, c'est-à-dire, 180 Degrés, sont appelés Supplément l'un de l'autre, lorsque deux Arcs vaudront ensemble un Demi-cercle ou 180 Degrés, nous dirons aussi que l'un est Supplément de l'autre.

T H É O R È M E.

Fig. 68, 69, 70, 71, 72 & 73. **88** Un Angle BAC , dont le Sommet est à la Circonférence, a pour mesure la moitié de l'Arc ED compris entre ses côtés, lorsqu'il est formé par deux Cordes, ou par une Tangente & par une Corde; c'est-à-dire, lorsque ses côtés prolongés au-delà du Sommet ne peuvent plus rencontrer la Circonférence.

D É M O N S T R A T I O N.

La mesure d'un Angle, quelle que soit la situation de son Sommet, est égale à l'Arc qu'il comprendroit entre ses côtés s'il avoit son Sommet au Centre. Ainsi en disant que les Angles dont il est question, ont pour mesure la moitié de l'Arc compris entre leurs côtés, on entend que si ces Angles avoient leurs Sommets au Centre, ils ne comprendroient entre leurs côtés que la moitié de l'Arc qu'ils comprennent ayant leurs Sommets à la Circonférence. Comme il peut arriver trois Cas, nous partagerons la démonstration du Théorème en trois parties.

Fig. 68
& 69.

Premier Cas. Si un côté AB de l'Angle BAC passe par le Centre O , soit tirée par ce Centre O une Droite MP parallèle à l'autre côté AC .

On aura l'Angle $BAC = BOP$ (N°. 50.). Mais l'Angle BOP ayant son Sommet au Centre a pour mesure l'Arc DP (N°. 81.). Donc l'Angle BAC a aussi pour mesure l'Arc DP . Il nous reste maintenant à démontrer que l'Arc DP n'est que la moitié de l'Arc DPE .

Les Angles BOP , AOM , qui ont leur Sommet au Centre O , sont égaux (N°. 30.). Ainsi $DP = AM$ (N°. 82.). Mais l'Arc $AM = PE$ (N°. 71 ou 73.). Donc l'Arc $DP = PE$; & par conséquent DP est la moitié de l'Arc DPE . Donc l'Angle BAC a pour

mesure la moitié de l'Arc DPE compris entre ses côtés. *Ce qu'il falloit 1^o. démontrer.*

Second Cas. Si le Centre O est compris entre les deux côtés de l'Angle BAC , soit tirée la Droite AP par le Sommet A & par le Centre O . L'Angle BAC sera partagé en deux Angles BAP , PAC , qui seront dans le premier Cas ; c'est-à-dire, que chaque Angle aura un côté AP qui passera par le Centre O . Ainsi

Fig. 70
& 71.

1^o. L'Angle BAP aura pour mesure la moitié de l'Arc DP .

2^o. L'Angle PAC aura pour mesure la moitié de l'Arc PE .

Donc l'Angle entier BAC aura pour mesure la moitié de l'Arc DP avec la moitié de l'Arc PE , c'est-à-dire, la moitié de l'Arc DPE compris entre ses côtés. *Ce qu'il falloit 2^o. démontrer.*

Troisième Cas. Si le Centre O n'est ni dans un côté ni entre les côtés de l'Angle BAC , soit tirée la Droite AP par le Sommet A & par le Centre O .

Fig. 72
& 73.

1^o. La somme des deux Angles BAC , CAP , ou l'Angle total BAP , ayant un côté qui passe par le Centre, a pour mesure la moitié de l'Arc DEP , (Cas 1.), c'est-à-dire, $\frac{DE}{2} + \frac{EP}{2}$.

2^o. Mais l'Angle CAP a pour mesure la moitié de l'Arc EP ou $\frac{EP}{2}$ (Cas 1.).

Donc l'autre Angle BAC a pour mesure $\frac{DE}{2}$, c'est-à-dire, la moitié de l'Arc compris entre ses côtés. *Ce qu'il falloit 3^o. démontrer.*

Donc dans tous les cas un Angle BAC , dont le Sommet est à la Circonférence, a pour mesure la moitié de l'Arc compris entre ses côtés, lorsqu'il est formé par deux Cordes ou par une Tangente & par une Corde ; c'est-à-dire, lorsque ses côtés prolongés

gés au-delà du Sommet ne peuvent plus rencontrer la Circonférence. Ce qu'il falloit démontrer.

89 On a supposé dans ce Théorème que les côtés de l'Angle BAC , étant prolongés au-delà du Sommet A , ne pou-
Fig. 74. voient plus rencontrer la Circonférence. On va maintenant démontrer que si l'Angle BAC , dont le Sommet est à la Circonférence, avoit un Côté AB , qui, prolongé au-delà du Sommet, pût encore rencontrer la Circonférence par son prolongement AD , cet Angle BAC auroit pour mesure la moitié de l'Arc AE compris entre ses côtés, plus la moitié de l'Arc AD soutenu par le prolongement AD du côté AB .

Car les Angles BAC , CAD , valent ensemble deux Angles droits. Ainsi ils ont ensemble pour mesure un Demi-cercle, c'est-à-dire, $\frac{AE}{2} + \frac{AD}{2} + \frac{ED}{2}$. (No. 87.). Mais l'Angle CAD a pour mesure $\frac{ED}{2}$ (No. 88.). Donc l'Angle BAC a pour mesure la moitié des deux autres Arcs du Cercle, c'est-à-dire, $\frac{AE}{2} + \frac{AD}{2}$.

COROLLAIRE I.

Fig. 75. 90 Puisque les Angles qui ont le Sommet à la Circonférence, ont pour mesure les moitiés des Arcs compris entre leurs côtés, lorsque ces côtés prolongés au-delà du Sommet ne rencontrent plus la Circonférence, il est évident que

Les Angles ABD , DCE , qui ayant leur Sommet à la Circonférence sont appuyés sur des Arcs égaux AD , DE , sont égaux; & que les Angles BAC , BDC , BEC , qui ont le Sommet à la Circonférence, & qui sont appuyés sur le même Arc BC , sont aussi égaux.

Et réciproquement, lorsque des Angles égaux auront le Sommet à la Circonférence d'un même Cercle, les Arcs qu'ils comprendront entre leurs côtés seront égaux. Car si ces Arcs n'étoient point

égaux, les Angles qui les comprendroient & qui auroient pour mesure la moitié de ces Arcs, ne feroient pas égaux.

Il est encore évident que si deux Angles inégaux ont le Sommet à la Circonférence, ils comprendront entre leurs côtés des Arcs inégaux; & que le plus grand Angle contiendra le plus grand Arc.

Et réciproquement, si deux Angles qui ont le Sommet à la Circonférence, comprennent entre leurs côtés des Arcs inégaux, celui qui contiendra le plus grand Arc fera le plus grand.

COROLLAIRE II.

91 1°. Un Angle BAC est droit, quand il a son Sommet à la Circonférence, & qu'il est appuyé sur le Diametre BC , c'est-à-dire, lorsqu'il renferme entre ses côtés un Demi-cercle BDC , ou qu'il est renfermé dans un Demi-cercle BAC . Car alors il a pour mesure un Quart de Cercle, & par conséquent il est droit (N°. 86.). Fig. 76.

2°. Un Angle BAC est obtus, lorsqu'il a le Sommet à la Circonférence, & qu'il renferme entre ses côtés un Arc BDC plus grand que le Demi-cercle, ou qu'il est renfermé dans un Arc BAC plus petit que le Demi-cercle (N°. 86.). Car alors il a pour mesure un Arc plus grand que le Quart de Cercle. Fig. 77.

3°. Un Angle BAC est aigu, quand il a le Sommet à la Circonférence, & qu'il renferme entre ses côtés un Arc BC plus petit que le Demi-cercle, ou qu'il est renfermé dans un Arc $BADC$ plus grand que le Demi-cercle (N°. 86.). Car alors il a pour mesure un Arc plus petit que le Quart de Cercle. Fig. 78.

La premiere partie de ce Corollaire nous fournit un nouveau moyen pour mener une Perpendiculaire à l'extrémité d'une Ligne, lorsque cette Ligne ne peut pas être prolongée.

Fig. 79. 92 1°. Si l'on veut mener une Perpendiculaire par l'extrémité A de la Droite AC, d'un Point quelconque F, pris pour Centre au dehors de cette Ligne, on décrira par le Point A un Arc BAE qui rencontrera la Droite AC dans un second Point E. Puis ayant mené par le Centre F & par ce Point E un Diamètre EFB, on tirera la Droite BA, qui sera perpendiculaire sur AC. Car l'Angle BAC, ayant le Sommet à la Circonférence & étant appuyé sur le Diamètre BE, sera droit.

Fig. 80. 93 2°. Si d'un Point A, pris au dehors d'une Droite BC, on veut tirer une Perpendiculaire à cette Ligne, on mènera par ce Point A, une Oblique AE qui rencontrera BC en un Point quelconque E. Puis ayant décrit sur cette Oblique AE, comme Diamètre, un Demi-cercle ABE, qui rencontre la Droite BC dans un second Point B, on mènera la Droite AB qui sera nécessairement perpendiculaire à BC, puisque l'Angle ABE sera droit.

Fig. 81. 94 La même première partie du dernier Corollaire & la dernière construction de la Perpendiculaire nous conduisent à une méthode facile pour mener d'un Point A donné hors d'un Cercle, une Tangente AB, à sa Circonférence, & pour déterminer en même temps le Point d'attouchement. Car si du Point A, par lequel doit passer la Tangente, on mene une Droite AC au Centre C, & que sur cette Droite comme Diamètre on décrive un Cercle ABCb, les Points B, b, où cette nouvelle Circonférence rencontrera la Circonférence donnée, seront ceux où les Tangentes qu'on peut mener par le Point A rencontreront la Circonférence donnée : puisque si l'on mene les Droites AB, Ab, & les Rayons CB, Cb, les Angles ABC, AbC, seront droits ; & que les Droites AB, Ab, seront perpendiculaires aux extrémités des Rayons CB, Cb, & par conséquent Tangentes (No. 67.).

THÉORÈME.

T H É O R È M E.

95 Un Angle BAC , qui a le Sommet entre le Centre & la Circonférence, & dont les côtés sont prolongés au-delà du Sommet jusqu'à la Circonférence, a pour mesure la moitié de l'Arc BC compris entre ses côtés, plus la moitié de l'Arc EF compris entre les côtés de son opposé au Sommet. Fig. 82a

D É M O N S T R A T I O N.

Par le Point F , où le prolongement de l'un des côtés rencontre la Circonférence, soit tirée la Droite FD parallèle à l'autre côté AC . On aura l'Angle $BAC = BFD$. Mais (N^o. 88.) l'Angle BFD a pour mesure la moitié de l'Arc BD , c'est-à-dire, $\frac{BC}{2} + \frac{CD}{2}$. Donc l'Angle BAC a aussi pour mesure $\frac{BC}{2} + \frac{CD}{2}$.

Mais $\frac{CD}{2} = \frac{EF}{2}$, parce que $CD = EF$ (N^o. 71.) Donc l'Angle BAC a pour mesure $\frac{BC}{2} + \frac{EF}{2}$. Ce qu'il falloit démontrer.

On peut aussi démontrer que l'Angle BAE , qui a le Sommet entre le Centre & la Circonférence, a pour mesure la moitié de l'Arc BE compris entre ses côtés, plus la moitié de l'Arc FC compris entre les côtés de son opposé au Sommet.

Car les Angles BAE , BAC , valent ensemble deux Droits, & ont par conséquent pour mesure un Demi-cercle, c'est-à-dire, $\frac{BB}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{FC}{2} + \frac{EF}{2}$. Mais nous venons de voir que l'Angle BAC a pour mesure $\frac{BC}{2} + \frac{EF}{2}$. Donc l'Angle BAE a pour mesure $\frac{BB}{2} + \frac{FC}{2}$. Ce qu'il falloit démontrer.

Donc en général un Angle qui a le Sommet entre le Centre & la Circonférence, a pour mesure la moitié de l'Arc compris entre ses côtés, plus la moitié de l'Arc compris entre les côtés de son opposé au Sommet. Ce qu'il falloit démontrer.

Géom.

E *

Avertissement.

Fig. 83;
84 & 85. Un Arc DPE , dont la concavité est tournée vers le Sommet de l'Angle BAC entre les côtés duquel il est compris, s'appelle *Arc concave*; & un Arc MN , dont la convexité est tournée vers le Sommet de l'Angle BAC dans lequel il est compris, s'appelle *Arc convexe*. Ainsi le même Angle BAC comprend entre ses côtés un Arc concave DPE & un Arc convexe MN .

T H É O R È M E.

Fig. 83;
84 & 85. 96 Un Angle BAC , qui a le Sommet hors le Cercle, & qui comprend entre ses côtés un Arc concave DPE & un Arc convexe MN , a pour mesure la moitié de la différence des deux Arcs DPE , MN , compris entre ses côtés.

D É M O N S T R A T I O N.

Du Point M , où l'un des côtés AB rencontre la Circonférence, soit tirée la Droite MP parallèle à l'autre côté AC .

On aura l'Angle $BAC = BMP$ (N^o. 50.). Mais l'Angle BMP a pour mesure $\frac{DPE}{2}$ (N^o. 88.). Donc l'Angle BAC a aussi pour mesure $\frac{DPE}{2}$. Mais $PE = MN$ (N^o. 71 ou 73.). Ainsi DP est la différence qu'il y a entre les deux Arcs DPE , MN . Donc l'Angle BAC (ayant pour mesure la moitié de DP) a pour mesure la moitié de la différence qu'il y a entre l'Arc concave DPE & l'Arc convexe MN compris entre ses côtés. Ce qu'il falloit démontrer.

97 $DPE - MN$ est la différence des deux Arcs DPE , MN . Ainsi $\frac{DPE}{2} - \frac{MN}{2}$ est la moitié de la différence de ces deux Arcs. Mais nous venons de voir que l'Angle BAC a pour mesure la moitié de la différence des

deux Arcs DPE, MN, compris entre ses côtés. Donc l'Angle BAC a aussi pour mesure $\frac{DPE}{2} - \frac{MN}{2}$, c'est-à-dire, la moitié de l'Arc concave compris entre ses côtés, moins la moitié de l'Arc convexe aussi compris entre ses côtés.

SCHOLIE.

98 Il suit des trois derniers Théorèmes qu'on vient de démontrer, que

1°. Un Angle qui a pour mesure la moitié d'un Arc concave compris entre ses côtés, a son Sommet à la Circonférence du Cercle dont cet Arc fait partie ; parce que s'il avoit son Sommet au-dedans ou au-dehors du Cercle, il auroit une mesure plus grande ou plus petite que la moitié de l'Arc compris entre ses côtés (N°. 95 ou 96.).

2°. Un Angle dont la mesure est plus grande que la moitié de l'Arc concave qu'il comprend entre ses côtés, a son Sommet au-dedans du Cercle ; puisque s'il avoit son Sommet à la Circonférence ou au dehors du Cercle, sa mesure seroit égale à la moitié, ou plus petite que la moitié de l'Arc compris entre ses côtés (N°. 88 ou 96.).

3°. Un Angle dont la mesure est plus petite que la moitié de l'Arc concave compris entre ses côtés, a le Sommet au-dehors du Cercle ; car s'il avoit son Sommet à la Circonférence ou au-dedans du Cercle, sa mesure seroit égale à la moitié, ou plus grande que la moitié de l'Arc compris entre ses côtés (N°. 88 ou 95.).

COROLLAIRE I.

99 Il suit de la première partie de ce Scholie, que si l'on fait glisser les côtés d'un Angle invariable BAC, sur deux Points fixes M, N, le Sommet A de cet Angle décrira un Arc de Cercle MAN. Car l'Angle invariable étant dans une situation quel-

Fig. 86.

conque BAC , si l'on fait passer par les deux Points fixés M , N , & par le Sommet A , une Circonférence $MANEM$, l'Angle BAC ou MAN aura pour mesure la moitié de l'Arc MEN compris entre ses côtés (N^o. 88.). Mais dans quelque autre situation qu'on mette l'Angle BAC , en faisant glisser ses côtés sur les Points M , N , il aura toujours pour mesure la moitié du même Arc MEN , puisqu'il est invariable. Donc son Sommet A sera toujours dans la Circonférence, & décrira par conséquent un Arc de Cercle MAN (N^o. 98.).

COROLLAIRE II.

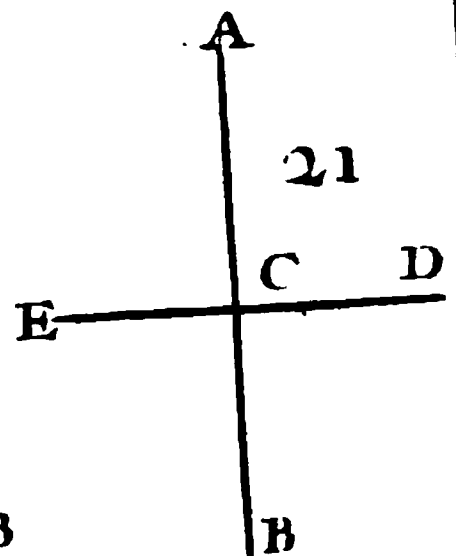
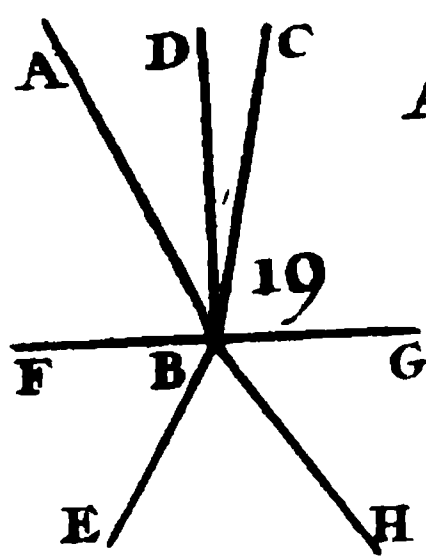
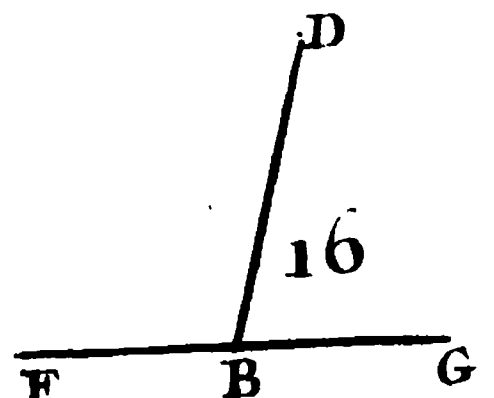
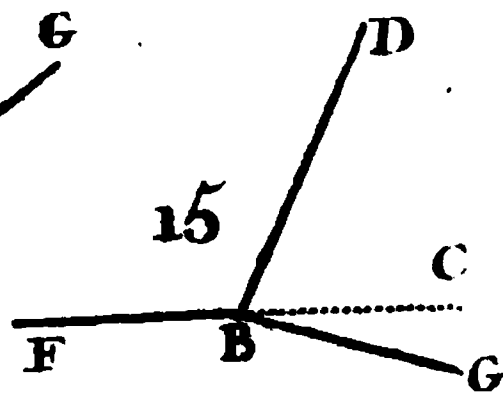
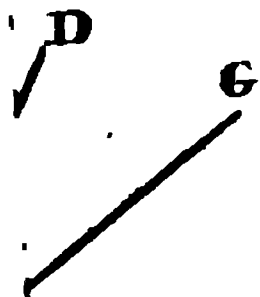
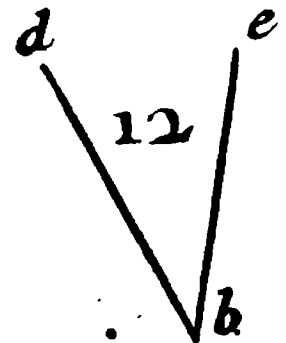
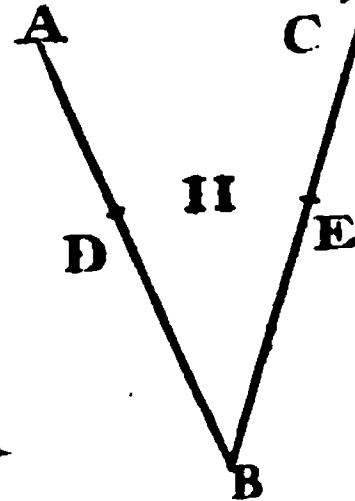
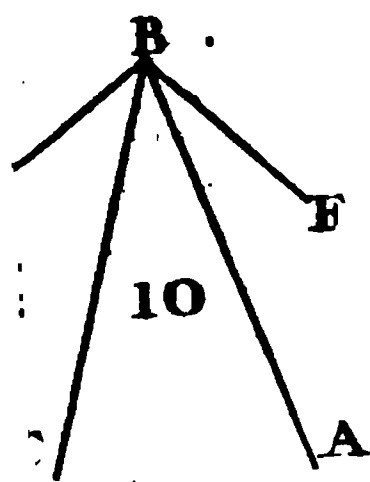
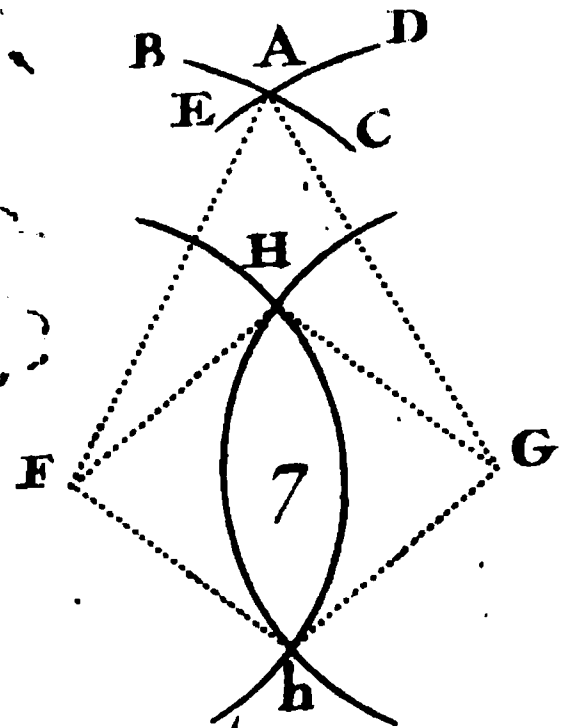
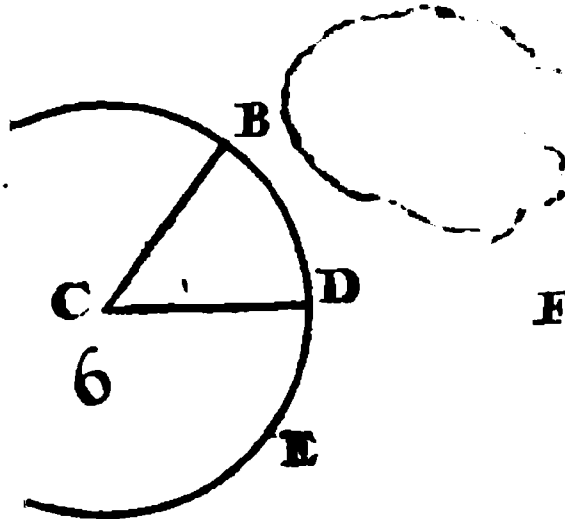
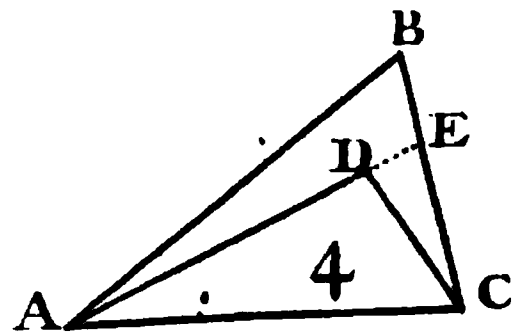
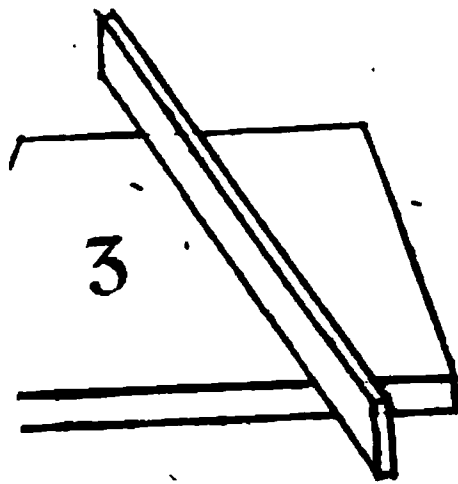
Fig. 86. 100 La moitié de l'Arc MAN est le supplément de la moitié de l'Arc MEN , ou de la mesure de l'Angle invariable BAC . Donc l'Arc MAN , décrit par le Sommet A de l'Angle invariable, est double du supplément de la mesure de l'Angle BAC .

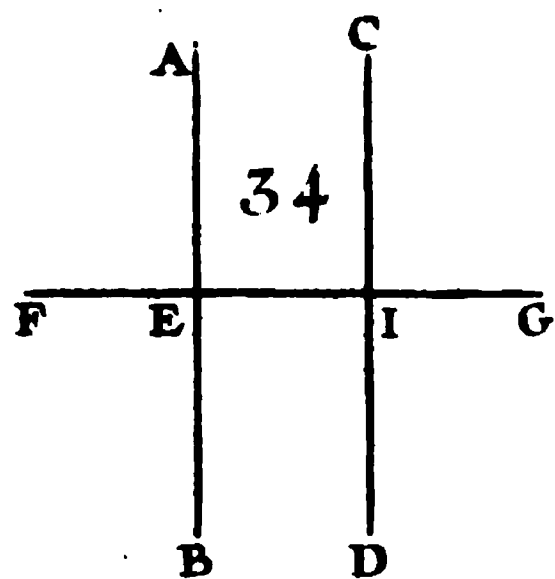
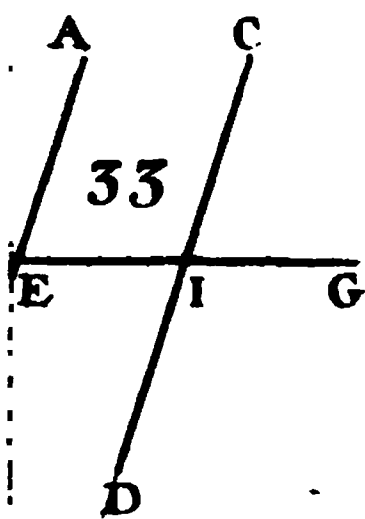
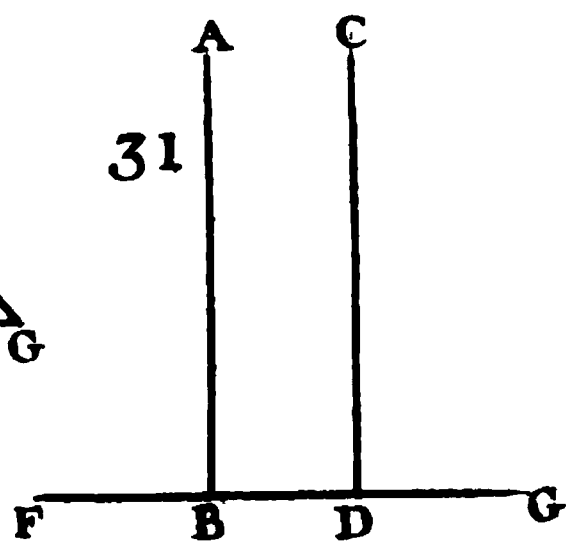
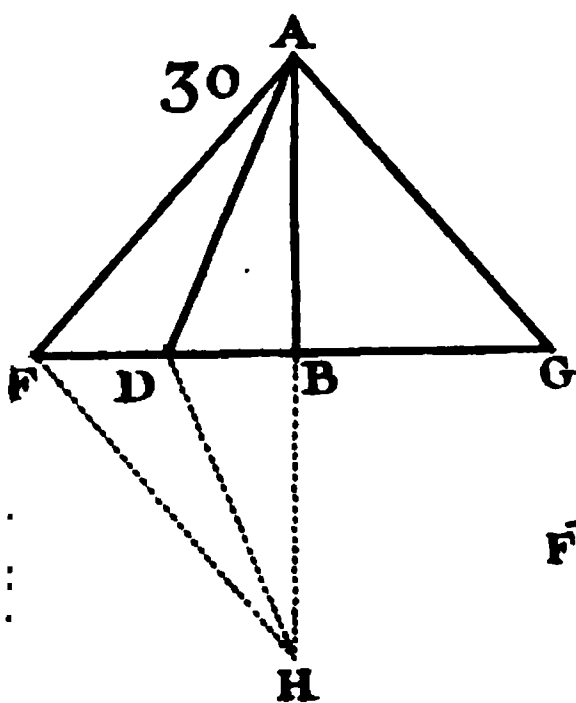
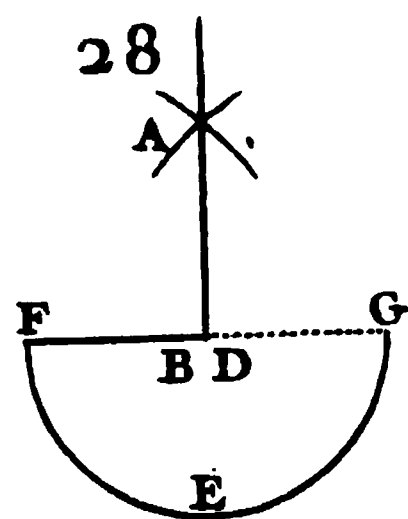
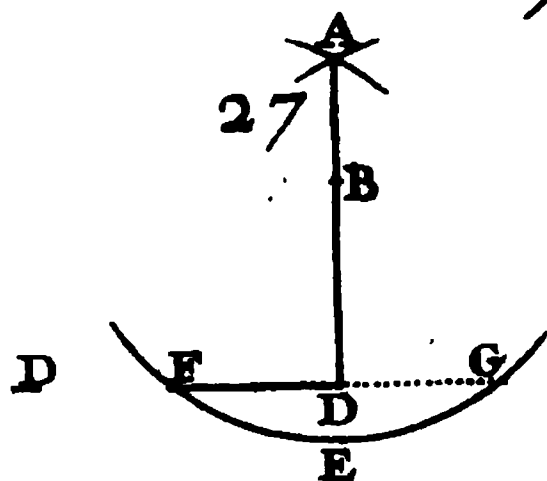
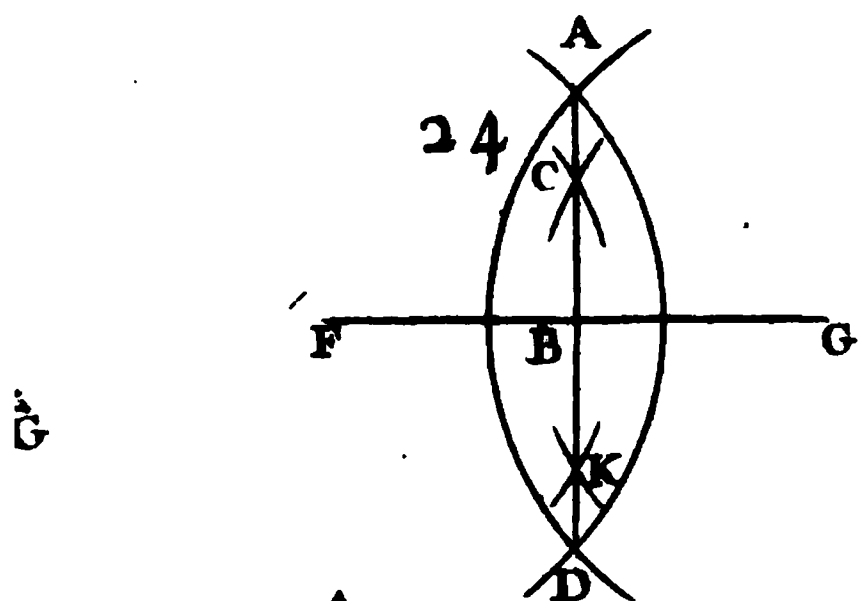
D'où il suit que si l'Angle invariable BAC est droit, l'Arc MAN , décrit par son Sommet, sera un Demi-cercle.

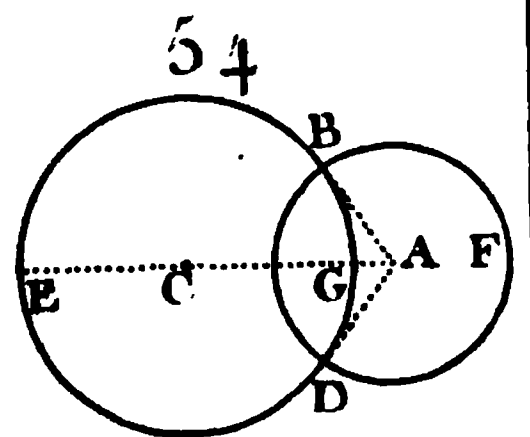
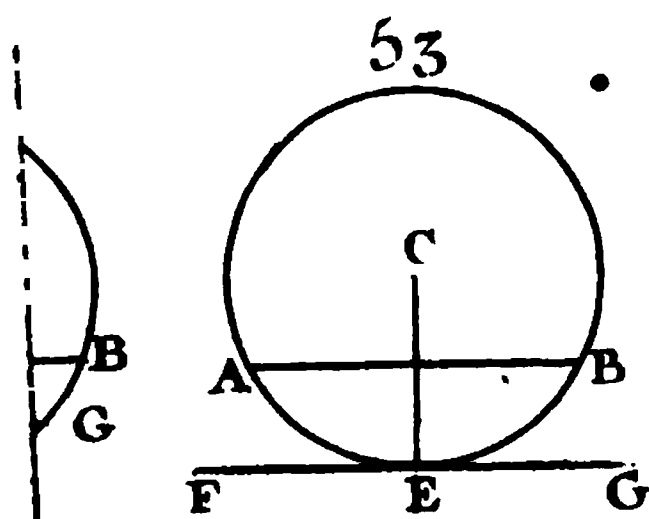
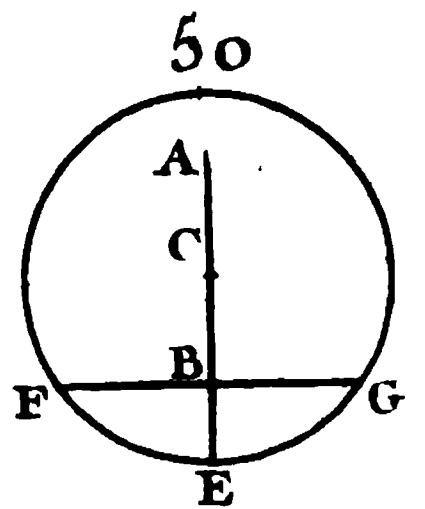
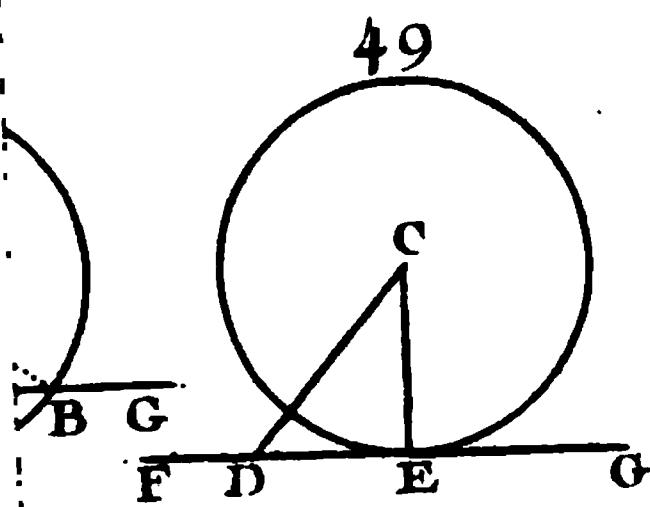
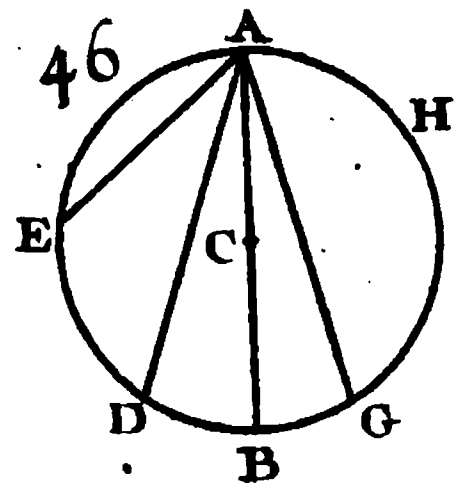
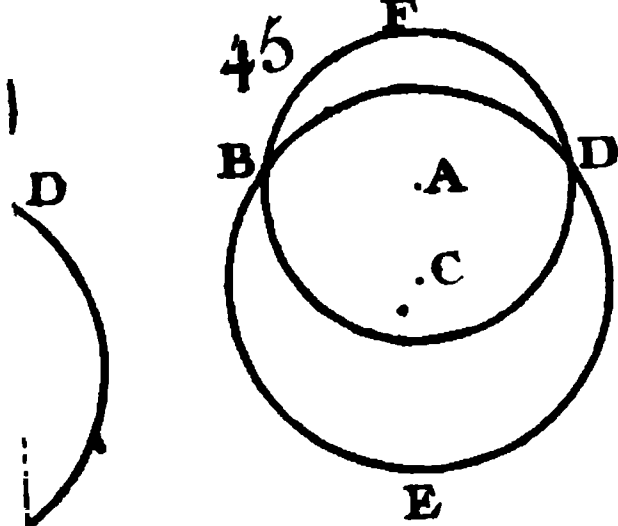
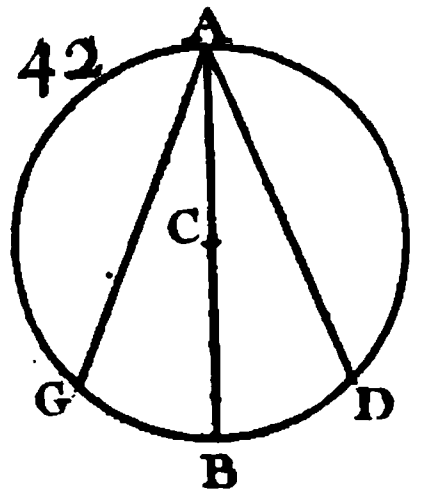
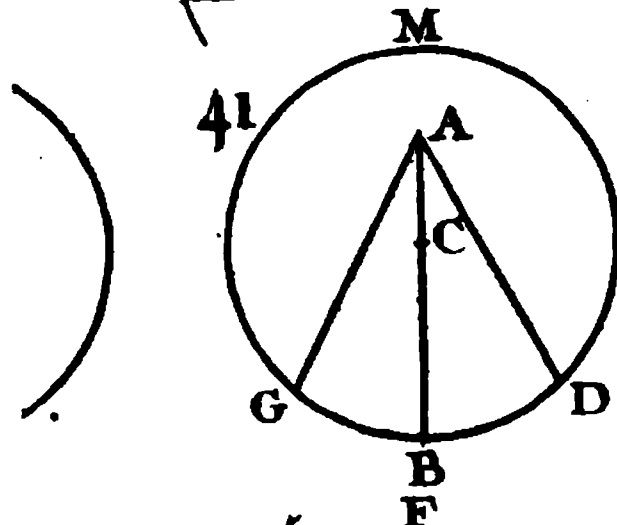
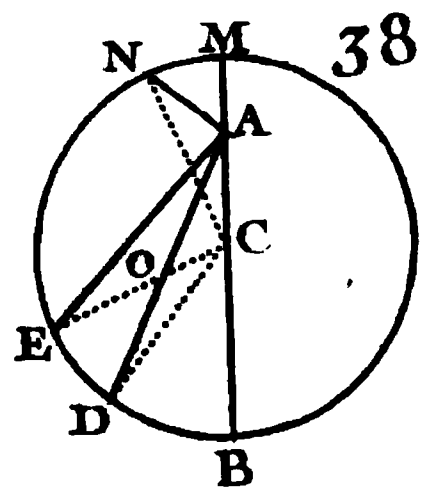
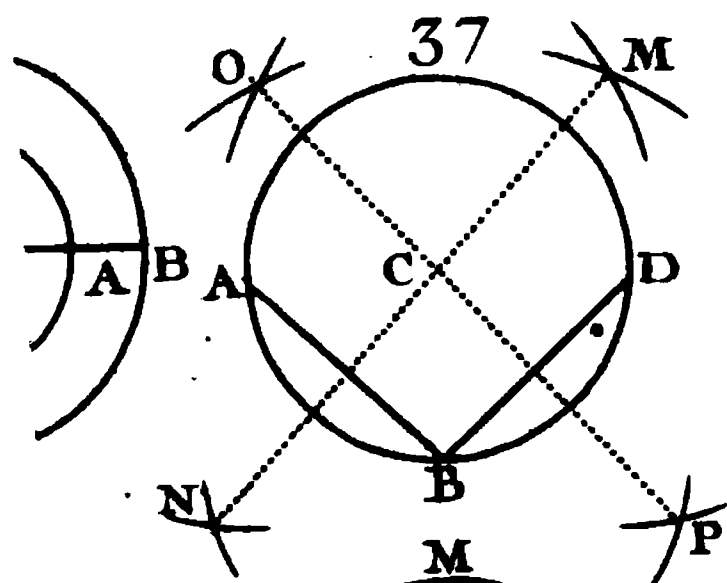
On fait usage de ces Angles invariables pour décrire sans Compas ni Cordeau des Arcs d'un nombre de degrés donné, lorsque leur Centre est très-éloigné.

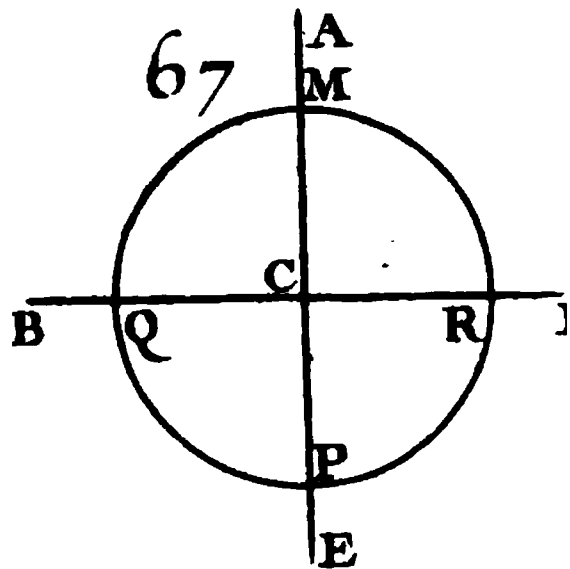
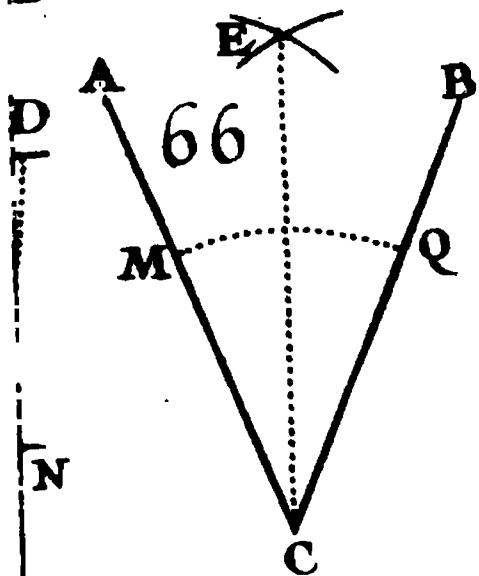
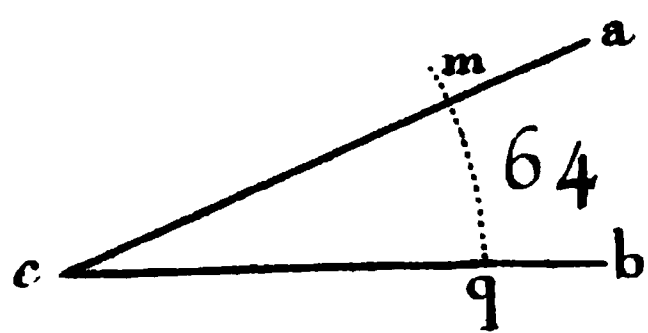
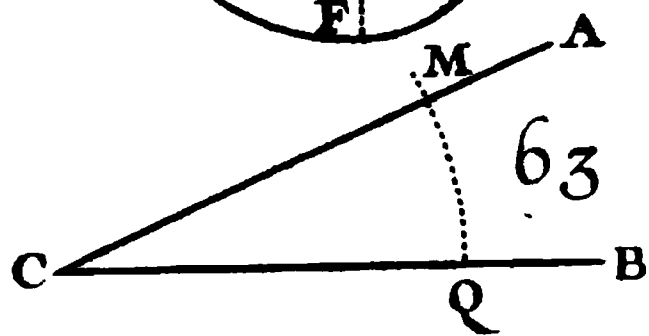
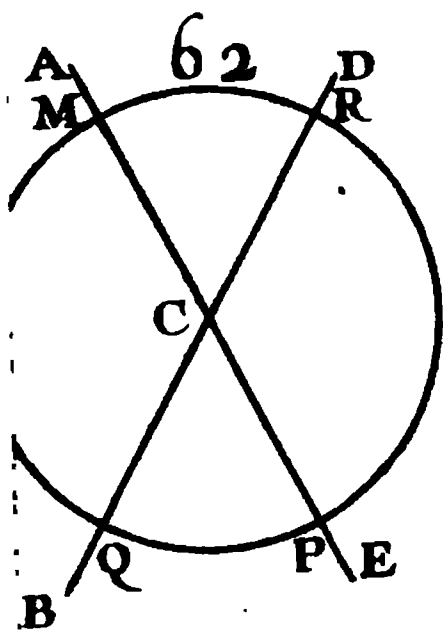
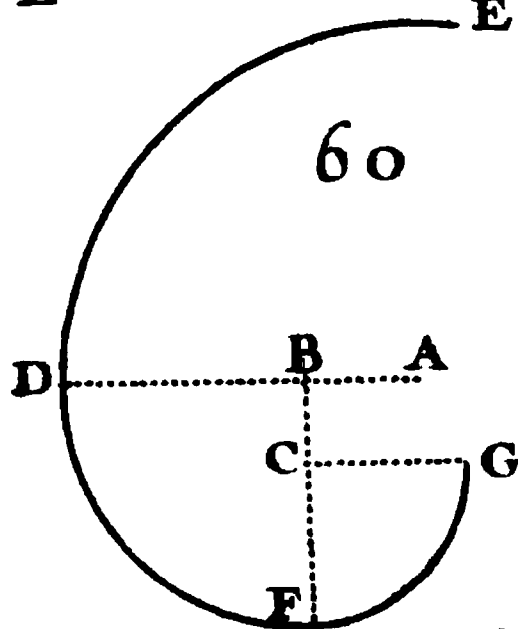
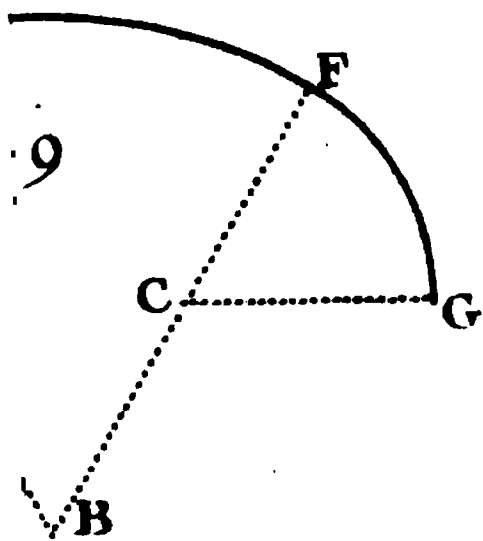
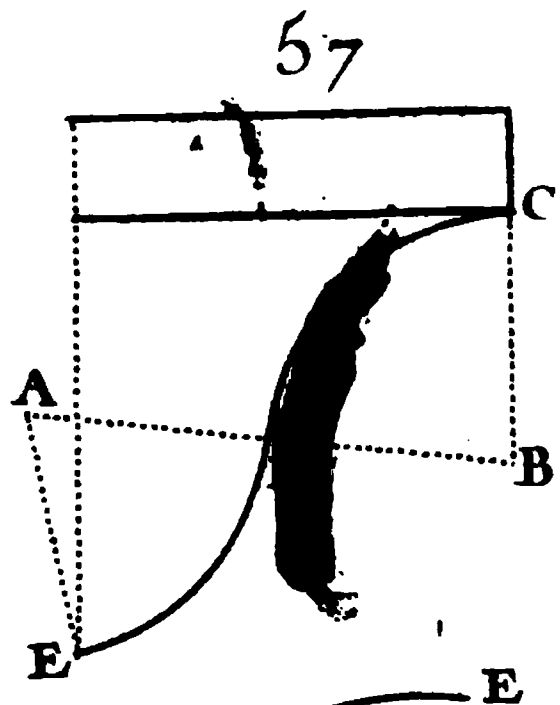
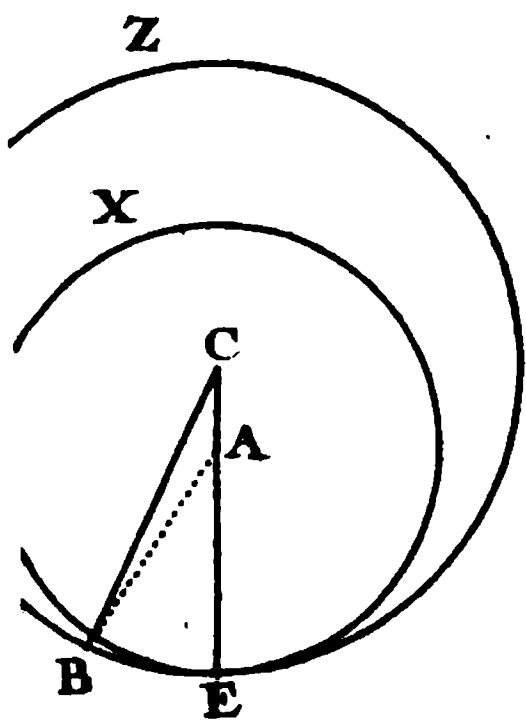
Fig. 87. Par exemple, pour décrire un Arc de 30 degrés sur une Corde MN de longueur donnée, on fera un Angle BAC , qui aura pour mesure le supplément de la moitié de l'Arc MAN de 30 degrés que l'on veut décrire; c'est-à-dire, qu'il aura pour mesure 165 degrés, supplément de 15 degrés: & faisant glisser les côtés de cet Angle sur les extrémités de la Droite MN donnée pour Corde, son Sommet décrira un Arc MAN de 30 degrés.

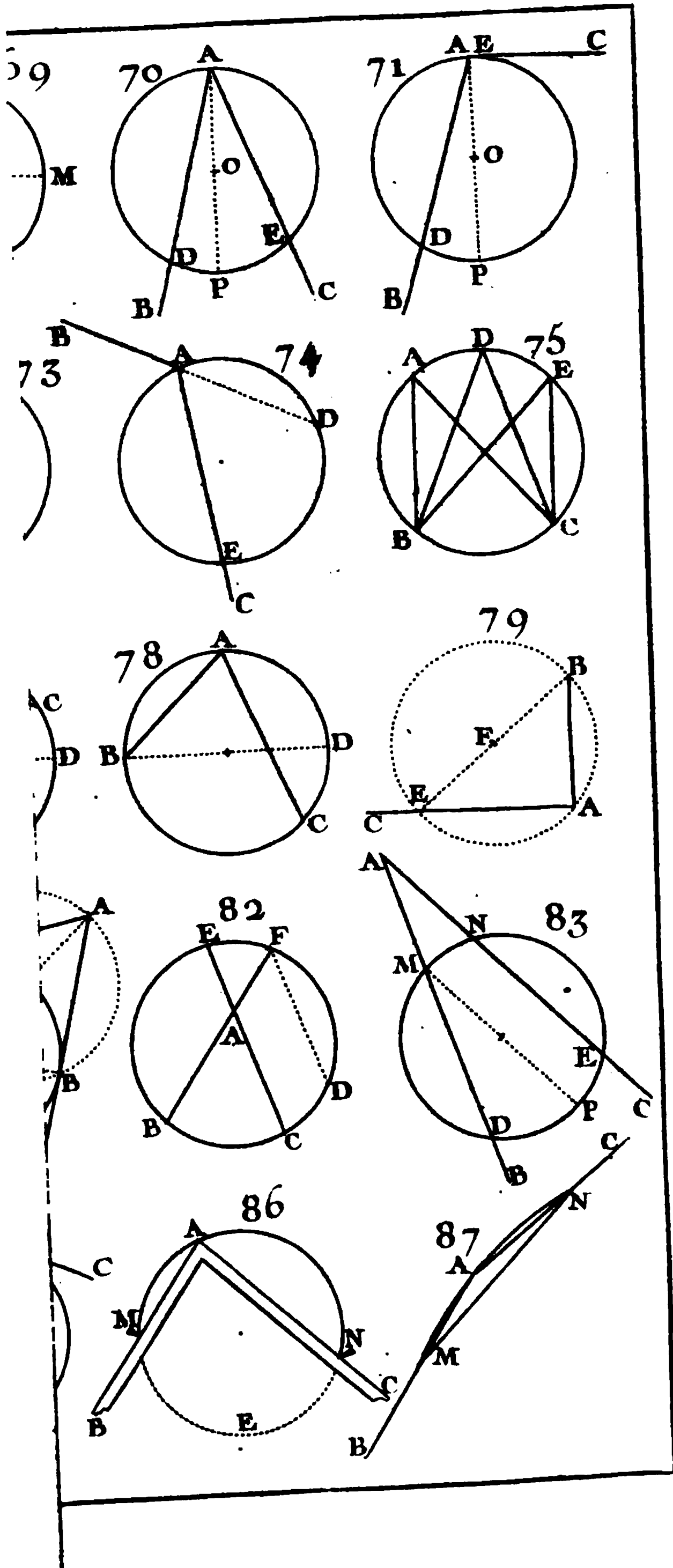












11

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE THÉORIQUE ET PRATIQUE.



LIVRE II.

Des Superficies & de leurs Figures.

IN a défini la Surface une Étendue en longueur & largeur sans épaisseur.

On distingue deux sortes de Surfaces ; savoir, la Surface plane, qu'on appelle simplement Plan, & la Surface courbe.

DÉFINITIONS.

101 Nous avons déjà dit (N^o. 8.) qu'une Surface à laquelle on peut appliquer une Ligne droite en tous sens se nomme *Surface plane* ou *Plan* ; & qu'on entend par une Droite appliquée à une Surface, une Ligne droite qui se confond avec la Surface, de manière qu'il n'y a point d'espace entr'elle & la Surface. Nous avons dit aussi (N^o. 8.) qu'une Surface à laquelle on ne peut pas appliquer une Ligne droite en tous sens s'appelle *Surface courbe*.

On distingue les Plans par la nature des Lignes qui les renferment.

Les Plans qui sont renfermés par des Lignes droites se nomment *Plans rectilignes* ; les Plans qui sont renfermés par des Lignes courbes s'appellent *Plans curvilignes* ; & ceux qui sont renfermés par des Lignes droites & par des Lignes courbes s'appellent *Plans mixtilignes*.

Comme ces trois espèces de Plans ont autant d'Angles que de côtés , on distingue encore ceux de chaque espèce , par le nombre de leurs Angles ou par le nombre de leurs côtés ; c'est-à-dire , que chaque Figure est désignée par un nom , qui marque en même temps la nature de ses côtés , & le nombre de ses Angles ou de ses côtés.

Cependant les Figures rectilignes étant celles que l'on considère le plus particulièrement , on se contente de leur donner des noms qui désignent seulement le nombre de leurs Angles ou de leurs côtés.

Un Plan renfermé par trois Lignes droites devroit se nommer *Triangle rectiligne* ; mais on l'appelle simplement *Triangle*. On le nomme quelquefois *Trigone* , & l'on pourroit l'appeler *Trilatere*.

Lorsque le Plan est renfermé par quatre Lignes droites , on le nomme *Quadrilatere*.

Si cinq Lignes droites le renferment ,
on le nomme

Pentagone.

Si six Lignes droites le renferment ,

Exagone.

Si sept Lignes droites le renferment ,

Eptagone.

Si huit Lignes droites ,

Octogone.

Si neuf ,

Ennéagone.

Si dix ,

Décagone.

Si onze ;

Endécagone.

Si douze ;

Dodécagone.

Enfin lorsqu'un Plan est renfermé par une quan-

ité de Lignes droites dont on ne veut pas fixer le nombre, on le nomme *Multilateré* ou *Polygone*.

Lorsque les Lignes qui renferment un Plan sont toutes courbes, on ajoute le mot *curviligne* au nom qui désigne le nombre de ses Angles ou de ses côtés. Par exemple, un Plan renfermé par trois Lignes courbes, s'appelle *Triangle curviligne*. Lorsque parmi les côtés du Plan il y a des Lignes droites & des Lignes courbes, on ajoute le mot *mixtiligne* au nom qui marque le nombre de ses Angles ou de ses cotés. Ainsi un Plan qui seroit renfermé par quatre Lignes, dont une ou deux ou trois seulement seroient courbes, s'appelleroit *Quadrilatère mixtiligne*.

Quoiqu'il y ait une infinité de Plans renfermés par différentes Lignes, on ne considère dans ce Livre second que les Plans rectilignes : & lorsqu'on y parlera des Cercles qui sont des Plans curvilignes, ou de leurs Segmens & Secteurs qui sont des Plans mixtilignes, on les regardera comme des Polygones ; ou comme des portions de Polygones d'une infinité de côtés.

Comme les Triangles sont les Plans renfermés par le plus petit nombre de Lignes droites, & sont par conséquent les Plans les plus simples, l'ordre demande qu'en parlant des Plans, on commence par les Triangles.



CHAPITRE PREMIER.

Des Triangles.

DÉFINITIONS.

102 UN Triangle est un Plan renfermé par trois Lignes droites.

Fig. 20. Une Perpendiculaire AD , menée d'un Angle A d'un Triangle sur le côté BC opposé à cet Angle, se nomme *Hauteur* de ce Triangle; & le côté BC , sur lequel on a abaissé la Perpendiculaire AD , s'appelle *Base* de ce même Triangle ABC .

Fig. 21. Dans un Triangle, le côté opposé à un Angle s'appelle *Base* de cet Angle. Ainsi MP est la Base de l'Angle O ; OP est la Base de l'Angle M .

En considérant un Triangle par rapport à ses côtés, on en distingue de trois sortes; savoir, le *Triangle Équilatéral*, le *Triangle Isoscele*, & le *Triangle Scalene*.

Le *Triangle Équilatéral* est celui dont les trois côtés sont égaux.

Le *Triangle Isoscele* est celui qui a seulement deux côtés égaux.

Le *Triangle Scalene* est celui dont tous les côtés sont inégaux.

En considérant un Triangle par rapport à ses Angles, on en distingue aussi de trois espèces; le *Triangle Rectangle*, le *Triangle Obtusangle*, & le *Triangle Acutangle*.

Le *Triangle Rectangle*, qu'on nomme aussi *Triangle Orthogone*, est celui qui a un Angle droit.

Le *Triangle Obtusangle*, qu'on nomme aussi *Triangle Amblygone*, est celui qui a un Angle obtus.

Le *Triangle Acutangle*, qu'on nomme aussi *Triangle Oxygone*, est celui qui a tous les Angles aigus.

THÉORÈME.

103 *La somme des trois Angles d'un Triangle quelconque ABC , est égale à deux Angles droits.* Fig. 88.

DÉMONSTRATION.

Soit circonscrit un Cercle au Triangle ABC , c'est-à-dire, qu'on fasse passer un Cercle par les Sommets des trois Angles A, B, C , de ce Triangle (N°. 56.). Chaque Angle aura le Sommet à la Circonférence, & aura par conséquent pour mesure la moitié de l'Arc compris entre ses côtés (N°. 88.). Mais les trois Angles A, B, C , du Triangle, comprennent toute la Circonférence entre leurs côtés.

Donc ces Angles ont ensemble pour mesure la moitié de la Circonférence, & valent par conséquent ensemble deux Angles droits. Ce qu'il falloit démontrer.

On auroit pu, sans le secours de la mesure des Angles par le Cercle, démontrer que les trois Angles d'un Triangle ABC valent deux droits, en se servant seulement des propriétés des Parallèles. Car si l'on prolonge un côté BC en O , & qu'on mene CD parallèle à AB , les Angles alternes internes A, ACD , seront égaux; & les internes externes du même côté, B, DCO , seront aussi égaux. Ainsi les trois Angles du Triangle ABC seront égaux aux trois Angles ACB, ACD, DCO , qui valent deux droits (N°. 26.). Fig. 89.

COROLLAIRE I.

104 Donc la somme des trois Angles A, B, C , d'un Triangle, est égale à la somme des trois Angles M, O, P , d'un autre Triangle; puisque chacune de ces sommes vaut deux droits (N°. 103.). Fig. 90 & 91.

COROLLAIRE II.

Fig. 90 & 91. 105 Donc si deux Angles A, B , d'un Triangle, sont égaux à deux Angles M, O , d'un autre Triangle, chacun à chacun ou pris ensemble, le troisième Angle C du premier Triangle sera égal au troisième Angle P du second Triangle.

Car les Angles $A+B+C=M+O+P$ (N^o. 104.). Mais (*hyp.*) $A+B=M+O$. Donc (en retranchant la seconde Égalité de la première) on aura l'Angle $C =$ l'Angle P .

COROLLAIRE III.

106 Donc si un Triangle a un Angle droit, les deux autres ne vaudront ensemble qu'un Angle droit; & chacun de ces deux Angles sera par conséquent aigu.

COROLLAIRE IV.

107 Donc si un Triangle a un Angle obtus, les deux autres seront ensemble moindre qu'un droit; & chacun d'eux sera par conséquent aigu.

COROLLAIRE V.

108 Donc 1^o. un Triangle ne peut avoir qu'un Angle droit.

2^o. Il ne peut avoir qu'un Angle obtus.

3^o. Il peut avoir tous ses Angles aigus.

4^o. Il ne peut pas avoir un Angle droit avec un obtus.

THÉORÈME.

Fig. 92. 109 Si l'on prolonge un côté quelconque BC d'un Triangle ABC , l'Angle extérieur ACO vaudra lui seul autant que les deux intérieurs opposés A, B .

DÉMONSTRATION.

Soit circonscrit un Cercle au Triangle ABC . L'Angle extérieur ACO aura pour mesure $\frac{BIC}{2} + \frac{AZC}{2}$ (N^o. 89.). Mais l'Angle A a pour mesure $\frac{BIC}{2}$, & l'Angle B a pour mesure $\frac{AZC}{2}$ (N^o. 88.). Donc la mesure de l'Angle extérieur ACO est égale à la somme des mesures des deux intérieurs opposés A, B ; & par conséquent l'Angle ACO est égal à la somme des deux Angles A & B . Ce qu'il falloit démontrer.

On auroit pu démontrer par les propriétés des Parallèles, que l'Angle extérieur ACO est égal à la somme des deux intérieurs opposés A & B . Car si l'on prolonge le côté BC en O , & qu'on tire CD parallèle à BA , les Angles alternes internes BAC, ACD , seront égaux; & les internes externes du même côté, B, DCO , seront aussi égaux (N^o. 50.). Ainsi l'Angle extérieur ACO ou $ACD + DCO$ sera égal à la somme des deux intérieurs opposés A & B . Fig. 89.

COROLLAIRE.

II O Donc l'Angle extérieur ACO est plus grand qu'aucun des intérieurs opposés A, B .

Nous aurions pu réserver la mesure des Angles qui ont le Sommet entre le Centre & la Circonférence, & celle des Angles qui ont le Sommet au dehors du Cercle, pour en faire des Corollaires de ce Théorème; & nous aurions pu démontrer que

1^o. Un Angle BAC , qui a le Sommet entre le Centre & la Circonférence, a pour mesure la moitié de l'Arc BC compris entre ses côtés, plus la moitié de l'Arc FE compris entre les côtés de son opposé au Sommet. Fig. 93.

Car en tirant la Corde BF , l'Angle BAC qui sera extérieur au Triangle ABF sera égal à la somme des deux Angles intérieurs F, B , & aura par conséquent pour me-

76 Liv. II. Chap. I. DES TRIANGLES.

sure la somme des mesures de ces deux Angles, c'est-à-dire $\frac{BC}{2} + \frac{FE}{2}$ (N^o. 88.).

Fig. 94. 2^o. Un Angle qui a le Sommet au dehors du Cercle, a pour mesure la moitié de l'Arc concave BC compris entre ses côtés, moins la moitié de l'Arc convexe DE aussi compris entre ses côtés.

Car si l'on tire la Corde BE, l'Angle BEC sera extérieur au Triangle ABE. Ainsi l'on aura les Angles $A + B = BEC$, & par conséquent l'Angle $A = BEC - B$. Mais (N^o. 88.) l'Angle BEC a pour mesure $\frac{BC}{2}$; & l'Angle B a pour mesure $\frac{DE}{2}$. Donc l'Angle A ou $BEC - B$ a pour mesure $\frac{BC}{2} - \frac{DE}{2}$.

T H É O R È M E.

Fig. 88. III Dans un même Triangle ABC,

- 1^o. Les côtés opposés aux Angles égaux sont égaux.
- 2^o. Et réciproquement les Angles opposés aux côtés égaux sont égaux.

D É M O N S T R A T I O N.

Soit circonscrit un Cercle au Triangle ABC (N^o. 56.).

1^o. Si l'Angle $B = C$, on aura l'Arc $AZC = AXB$ (N^o. 90.), & par conséquent la Corde ou côté $AC = AB$ (N^o. 60.). Ce qu'il falloit 1^o. démontrer.

2^o. Si le côté $AB = AC$, on aura l'Arc $AXB = AZC$ (N^o. 60.), & par conséquent l'Angle $C = B$ (N^o. 90.). Ce qu'il falloit 2^o. démontrer.

C O R O L L A I R E I.

III2 Donc un Triangle qui aura les trois Angles égaux, aura aussi les trois côtés égaux (N^o. III.), & sera par conséquent équilatéral (N^o. 102.).

Et réciproquement, un Triangle équilatéral aura les trois Angles égaux.

COROLLAIRE II.

II3 Donc un Triangle qui a deux Angles égaux est isoscele, c'est-à-dire, qu'il a deux côtés égaux.

Et réciproquement un Triangle isoscele a deux Angles égaux.

THEOREME.

II4 Dans un même Triangle ABC ,

Fig. 95.

1°. Le plus grand côté est opposé au plus grand Angle.

2°. Et réciproquement le plus grand Angle est opposé au plus grand côté.

DÉMONSTRATION.

Soit circonscrit un Cercle au Triangle ABC (N°. 56.).

1°. Si l'Angle $C > B$, on aura l'Arc $AXB > AZC$ (N°. 90.), & par conséquent le côté ou la Corde $AB > AC$ (N°. 60.). Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

2°. Si le côté ou la Corde $AB > AC$, on aura l'Arc $AXB > AZC$ (N°. 60.), & par conséquent l'Angle $C > B$ (N°. 90.). Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

COROLLAIRE.

II5 Donc un Triangle qui a tous les Angles inégaux est scalene, c'est-à-dire, qu'il a tous les côtés inégaux.

Et réciproquement, un Triangle scalene ou qui a tous les côtés inégaux, a aussi tous les Angles inégaux.

T H É O R È M E.

Fig. 100 & 101. **I I 6** Deux Triangles $A C B$, $M O P$, sont parfaitement égaux, lorsqu'ils ont un Angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; c'est-à-dire, si l'Angle $C =$ l'Angle O , si $A C = M O$, & si $B C = P O$.

D É M O N S T R A T I O N.

Soit appliqué le Sommet C de l'Angle $A C B$ sur le Sommet O de l'Angle égal $M O P$, de manière que le côté $A C$ se confonde avec le côté $M O$ qui lui est égal. Il est clair (No. 16.) que le côté $B C$ se couchera sur le côté $P O$, & que le Point B tombera en P ; puisqu'on suppose $B C = P O$. Le troisième côté $A B$ du premier Triangle se confondra donc avec le troisième côté $M P$ du second; en sorte que les deux Triangles $A C B$, $M O P$, ne feront qu'un seul & même Triangle, & seront par conséquent égaux en toutes choses. Ce qu'il falloit démontrer.

T H É O R È M E.

Fig. 96 & 97. **I I 7** Si deux Angles inégaux $B C A$, $B C D$, sont compris entre côtés égaux chacun à chacun, le côté $B A$ opposé au plus grand Angle $B C A$ sera plus grand que le côté $B D$ opposé au plus petit Angle $B C D$.

Et réciproquement

Si les Bases $B A$, $B D$, de deux Angles $B C A$, $B C D$, compris entre côtés égaux chacun à chacun, sont inégales, l'Angle $B C A$ opposé à la plus grande Base $B A$ sera plus grand que l'Angle $B C D$ opposé à la plus petite Base $B D$.

D É M O N S T R A T I O N.

Ayant appliqué le Sommet C de l'Angle $B C A$

Sur le Sommet C de l'Angle BCD , en sorte que le côté BC du premier se confonde avec le côté égal BC du second, du Point C comme Centre on décrira par le Point A une Circonférence qui passera par le Point D ; puisqu'on suppose $CA = CD$. Enfin l'on prolongera le côté BC jusqu'à ce qu'il rencontre la Circonférence en E . Cela posé,

1°. Si l'Angle BCA est plus grand que l'Angle BCD , l'Arc OA qui sert de mesure à l'Angle BCA sera plus grand que l'Arc OD qui sert de mesure à l'Angle BCD . Ainsi le Point A sera plus près que le Point D de l'extrémité E de la Droite AE qui passe par le Centre : d'où il suit (N°. 57.) qu'on aura $BA > BD$. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

2°. Et réciproquement, si la Base BA opposée à l'Angle BCA est plus grande que la Base BD opposée à l'Angle BCD , le Point A sera plus proche que le Point D du bout E de la Droite BE qui passe par le Centre (N°. 57.); c'est-à-dire, qu'on aura l'Arc $EA < l'Arc ED$. Ainsi l'Arc OA qui sert de mesure à l'Angle BCA sera plus grand que l'Arc OD qui sert de mesure à l'Angle BCD : & par conséquent on aura l'Angle $BCA > l'Angle BCD$. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

TH É O R È M E.

II 8 Si les trois côtés BC , CA , BA , d'un Triangle BCA , sont égaux aux trois côtés BC , CD , BD , d'un autre Triangle BCD , chacun à chacun, les deux Triangles BCA , BCD , seront parfaitement égaux. Fig. 98 & 99.

D É M O N S T R A T I O N.

Pour démontrer que les deux Triangles proposés BCA , BCD , sont parfaitement égaux, il suffit

(N^o. 116.) de faire voir que les deux Angles BCA , BCD , dont on suppose les côtés égaux chacun à chacun, sont égaux. Or ces deux Angles sont égaux. Car s'ils n'étoient pas égaux, les côtés BA , BD , opposés à ces deux Angles, ne seroient pas égaux (N^o. 117.) : ce qui seroit contre l'hypothèse ; puisqu'on suppose les trois côtés BC , CA , BA , du premier Triangle, égaux aux trois côtés BC , CD , BD , du second, chacun à chacun.

Donc deux Triangles qui ont les trois côtés égaux chacun à chacun sont parfaitement égaux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

T H É O R È M E.

Fig. 100 & 101. 119 Deux Triangles ABC , MPO , sont parfaitement égaux, lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux Angles égaux chacun à chacun ; c'est-à-dire, si $AB = MP$, si l'Angle $A =$ l'Angle M , & si l'Angle $B =$ l'Angle P .

D É M O N S T R A T I O N.

Soit appliqué le côté MP sur le côté AB . Comme ils sont égaux, les Points M & P tomberont sur les Points A & B . Mais comme l'Angle $A = M$, le côté MO tombera sur AC ; & comme l'Angle $P = B$, le côté PO tombera sur BC (N^o. 16.). Ainsi les trois côtés du Triangle MPO tomberont sur les trois côtés du Triangle ABC . Donc ces deux Triangles se confondront, & seront par conséquent égaux en toutes choses. *Ce qu'il falloit démontrer.*

S C H O L I E.

Fig. 100 & 101. 120 Nous venons de voir (N^o. 116. 118. 119.) les trois caractères principaux auxquels on reconnoît que deux Triangles sont parfaitement égaux. Ces trois caractères

caractères d'égalité parfaite étant d'un grand usage dans la Géométrie, il est à propos d'en faire ici la récapitulation.

1°. Deux Triangles ACB , MOP , sont parfaitement égaux, quand ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun, c'est-à-dire, lorsque $AC = MO$, $AB = MP$, $CB = OP$ (N°. 118.).

2°. Deux Triangles ABC , MOP , seront parfaitement égaux, s'ils ont un Angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, c'est-à-dire, si l'Angle $C = O$, si $AC = MO$, & si $CB = OP$ (N°. 116.).

3°. Deux Triangles ACB , MOP , seront parfaitement égaux, s'ils ont un côté égal adjacent à deux Angles égaux chacun à chacun, c'est-à-dire, si $AB = MP$, & si les Angles A , B , sont égaux aux Angles M , P (N°. 119.).

De ces trois caractères auxquels on reconnoît que deux Triangles sont parfaitement égaux, on tire trois manières de faire un Triangle MOP égal à un autre Triangle donné ACB .

1°. Ayant fait une Droite MP égale à un côté AB du Triangle ACB , du Point M comme Centre, & d'un Rayon égal à AC , on décrira un Arc EOF ; & du Point P comme Centre, & d'un Rayon égal à BC , on décrira un Arc $G OH$ qui coupera le premier Arc en O . Puis on mènera les Droites OM , OP , qui feront avec MP un Triangle MOP égal au Triangle ACB , puisque leurs trois côtés seront égaux chacun à chacun.

Fig. 106
& 101.

2°. On fera (N°. 82.) un Angle MOP égal à un Angle ACB du Triangle donné. Puis ayant fait $MO = AC$, $OP = CB$, on mènera la Droite MP qui fera avec les deux Lignes MO , OP , un Triangle MOP égal au Triangle donné ACB ; puisque ces deux Triangles auront un Angle égal entre côtés égaux chacun à chacun.

82 Liv. II. Chap. I. DES TRIANGLES.

3°. *Ayant fait $MP = AB$, on mènera les deux Droites MO, PO (N°. 82.), qui feront avec MP deux Angles M, P , égaux aux deux Angles A, B , du Triangle ACB ; & ces deux Lignes feront avec MP un Triangle MOP égal au Triangle ACB , puisqu'ils auront un côté égal adjacent à deux Angles égaux chacun à chacun.*

R E M A R Q U E S.

121 Il est bon de remarquer ici que si deux Triangles ont quelqu'un de ces trois caractères auxquels on reconnoît leur égalité parfaite, les Angles égaux sont opposés aux côtés égaux, & que les côtés égaux sont opposés aux Angles égaux.

Il faut encore remarquer que pour mieux distinguer les parties correspondantes de deux Triangles parfaitement égaux, il est à propos de les nommer & de les écrire de manière que les Angles égaux correspondans tiennent le même lieu dans la nomination. Par exemple, si l'on reconnoît que l'Angle $A = M$ & que l'Angle $B = P$, on désignera les deux Triangles où sont ces Angles par ACB, MOP , ou par ABC, MPO , ou par CAB, OMP , &c.

Lorsque les Triangles sont ainsi nommés, c'est-à-dire, lorsque les Angles égaux tiennent le même lieu, les côtés égaux correspondans tiennent aussi le même lieu; & par conséquent il est aisé de les reconnoître dans la nomination.

T H É O R È M E.

122 1°. *La somme des Angles intérieurs d'un Polygone quelconque vaut autant de fois deux Angles droits moins quatre droits, que le Polygone a de côtés.*

2°. *La somme des Angles extérieurs d'un Polygone vaut toujours quatre Angles droits,*

DÉMONSTRATION.

1°. D'un Point quelconque F pris dans le Polygone, soient tirées des Droites à tous les Angles : on aura autant de Triangles que le Polygone a de côtés. Ainsi la somme des Angles de tous ces Triangles vaudra autant de fois deux Angles droits (N°. 103.) que le Polygone a de côtés. Mais la somme des Angles du Polygone est plus petite que la somme des Angles de tous les Triangles, de la valeur des Angles qui sont autour du Point F , lesquels valent ensemble quatre droits (N°. 26.). Donc la somme des Angles intérieurs d'un Polygone vaut autant de fois deux Angles droits moins quatre droits, que le Polygone a de côtés. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

2°. Chaque Angle intérieur ABC avec son extérieur CBE vaut deux Angles droits (N°. 21.). Ainsi la somme des intérieurs & des extérieurs vaut autant de fois deux droits que le Polygone a de côtés. Mais cette somme d'Angles droits surpasse de quatre droits les Angles intérieurs (Part. 1^{re}). Donc la somme des Angles extérieurs vaut toujours quatre droits. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

COROLLAIRE.

123 Donc les quatre Angles d'un Quadrilatere valent ensemble quatre droits. Ainsi lorsque les quatre Angles d'un Quadrilatere seront égaux, chacun d'eux sera droit.



CHAPITRE II.

Des Parallélogrammes.

DÉFINITIONS.

Fig. 103,
104, 105,
106 & 107.

124 UN Quadrilatere $ABCD$ qui a les côtés opposés parallèles, savoir, AB parallèle à DC & AD parallèle à BC , se nomme *Parallélogramme*; & celui qui n'a pas les côtés opposés parallèles, se nomme *Trapeze*.

Fig. 104.

Un Parallélogramme qui a tous les Angles égaux, & par conséquent droits (*N^o. 123.*), se nomme *Rectangle*; & celui qui n'a pas tous les Angles égaux,

Fig. 103.

se nomme *Rhomboïde*.

Fig. 105.

Un Rectangle qui a tous les côtés égaux, se nomme *Quarré*; & celui qui n'a pas tous les côtés égaux, se nomme simplement *Rectangle* ou *Quarré long*.

Fig. 104.

Fig. 106.

Un Rhomboïde qui a tous les côtés égaux, se nomme *Rhombe* ou *Lozange*.

Fig. 107.

Une Droite AC tirée par les Angles opposés d'un Parallélogramme, se nomme *Diagonale*.

Fig. 103.

Une Droite AE ou BF tirée d'un côté AB perpendiculairement sur le côté opposé DC prolongé s'il est nécessaire, se nomme *Hauteur* du Parallélogramme.

Fig. 107.

On nomme un Parallélogramme par les quatre lettres qui sont à ses quatre Angles; mais le plus souvent pour abréger la nomination, on le désigne par les deux lettres placées aux deux Angles opposés, quand il n'y a point de Diagonale tirée par ces deux Angles. Ainsi le Parallélogramme $ABCD$, qui aura une Diagonale AC , sera nommé BD & non pas AC , pour ne pas confondre ce Parallélogramme avec sa Diagonale AC .

THÉORÈME.

125 Lorsqu'un Quadrilatere $ABCD$ a deux côtés AB, DC , égaux & parallèles, les deux autres côtés AD, BC , sont aussi égaux & parallèles. Fig. 107.

DÉMONSTRATION.

Soit tirée la Diagonale AC . Les Droites AB, DC , étant parallèles, les Angles BAC, DCA , seront égaux (N^o. 50.). Mais ces Angles égaux seront compris entre des côtés égaux chacun à chacun; puisqu'on suppose $AB = DC$, & que AC est commun à l'un & à l'autre. Donc (N^o. 116.) les deux Triangles BAC, DCA , seront parfaitement égaux, & auront par conséquent les côtés & les Angles égaux.

On aura donc 1^o. $BC = AD$; 2^o. l'Angle $ACB = CAD$; & par conséquent les Droites BC, AD , seront parallèles (N^o. 51.).

Donc si un Quadrilatere a deux côtés opposés AB, DC , égaux & parallèles, les deux autres côtés AD, BC , seront aussi égaux & parallèles. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I

126 Puisqu'un Quadrilatere qui a deux côtés égaux & parallèles a les deux autres côtés égaux & parallèles (N^o. 125.), ce Quadrilatere est un Parallélogramme (N^o. 124.).

COROLLAIRE II

127 Deux Perpendiculaires AD, BC , à une même Droite EH , sont parallèles entr'elles (N^o. 48.). Ainsi lorsque deux Perpendiculaires AD, BC , à une même Droite EH , seront égales, les Droites $AB,$

Fig. 108.

EH , entre lesquelles elles seront comprises, seront parallèles.

COROLLAIRE III.

Fig. 109
& 110.

128 Donc si plusieurs Triangles ou Parallélogrammes EAF , GBH , placés sur une même Droite EH , & du même côté de cette Ligne, ont des hauteurs égales AD , BC , les Droites AB , EH , qui les comprendront, seront parallèles. Car les hauteurs AD , BC , de ces figures, seront des Perpendiculaires égales tirées sur une même Droite EH . Ainsi (N^o. 127.) les Droites AB , EH , qui les comprendront, seront parallèles : & comme les deux Plans EAF , GBH , seront contenus entre les mêmes Lignes que leurs hauteurs, il est clair que ces Plans seront compris entre deux Parallèles.

THÉORÈME.

129 Un Quadrilatere $ABCD$ qui a les côtés opposés parallèles, & qui est par conséquent un Parallélogramme, a les côtés opposés égaux.

DÉMONSTRATION.

Fig. 107.

Soit tirée la Diagonale AC . On aura deux Triangles BAC , DCA , qui auront un côté commun AC adjacent à deux Angles égaux chacun à chacun.

Car AB & CD étant parallèles, les deux Angles BAC , DCA , seront égaux (N^o. 50.); & BC , DA , étant aussi parallèles, les Angles BCA , DAC , seront aussi égaux (N^o. 50.).

Donc (N^o. 119.) les deux Triangles BAC , DCA , seront parfaitement égaux, & donneront par conséquent $AB = CD$, $BC = DA$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

130 Donc un Parallélogramme $ABCD$ est divisé par sa Diagonale AC en deux Triangles BAC , DCA , parfaitement égaux. Ainsi un Triangle DCA est la moitié d'un Parallélogramme $ABCD$ qui a même base & même hauteur que lui. Fig. 107.

COROLLAIRE II.

131 Donc deux Parallèles AB , EH , sont partout également distantes l'une de l'autre ; c'est-à-dire, que tous les Points de la Droite AB sont à la même distance de la parallèle EH . Fig. 108.

Car si de deux Points quelconques de la Droite AB , l'on mene deux Perpendiculaires AD , BC , à la parallèle EH , ces deux Perpendiculaires seront parallèles (N^o. 48.) ; & le Quadrilatere $ABCD$ sera un Parallélogramme dont les côtés opposés AD , BC , seront égaux (N^o. 129.).

Mais ces Perpendiculaires égales AD , BC , seront les Distances des deux Points A , B , à la Droite EH .

Donc deux Points quelconques de la Droite AB sont à la même distance de la parallèle EH ; & par conséquent deux Parallèles sont partout également distantes l'une de l'autre.

T H É O R È M E.

132 Un Quadrilatere $ABCD$ qui a ses côtés opposés égaux, a aussi ses côtés opposés parallèles, & est par conséquent un Parallélogramme. Fig. 107.

D É M O N S T R A T I O N.

Soit tirée la Diagonale AC . On fera deux Triangles

gles BAC , DCA , qui auront les trois côtés égaux chacun à chacun.

Car le côté AC fera commun à ces deux Triangles; & l'on suppose que les côtés opposés du Quadrilatere $ABCD$ sont égaux, c'est-à-dire, que $AB = CD$ & $BC = DA$. Ainsi les deux Triangles BAC , DCA , seront parfaitement égaux (N^o. 118.). D'où il suit que

1^o. Les Angles BAC , DCA , de ces Triangles, seront égaux; & les Lignes AB , DC , seront par conséquent parallèles (N^o. 51.).

2^o. Les Angles BCA , DAC , de ces mêmes Triangles, seront aussi égaux; & les Lignes BC , AD , seront par conséquent parallèles (N^o. 51.).

Donc un Quadrilatere qui aura les côtés opposés égaux, aura nécessairement les côtés opposés parallèles, c'est-à-dire (N^o. 124.), qu'il sera un Parallélogramme. *Ce qu'il falloit démontrer.*

T H É O R È M E.

Fig. III & 112. I 33 Deux Parallélogrammes $ABCD$, $MBCN$, sont égaux, lorsqu'ils ont même base BC , & qu'ils sont compris entre les mêmes Parallèles AN , BZ .

D É M O N S T R A T I O N.

Les Triangles ABM , DCN , ont les côtés égaux chacun à chacun.

1^o. $AB = DC$ (N^o. 129.); parce que ce sont les côtés opposés d'un même Parallélogramme $ABCD$.

2^o. $BM = CN$ (N^o. 129.); puisque ce sont les côtés opposés d'un même Parallélogramme $MBCN$.

3^o. Par la même raison $AD = BC$, & $BC = MN$. Ainsi $AD = MN$. Ajoutant MD aux deux membres de cette Égalité (Fig. 112.), ou (Fig. 111.)

DES PARALLÉLOGRAMMES. 89
 retranchant MD de ses deux membres, on aura
 $AM = DN$.

Donc les deux Triangles ABM , DCN , seront
 parfaitement égaux (N^o. 118.).

Ajoûtant à ces deux Triangles le même Trapèze Fig. 111:
 $MBCD$, il en résultera le Parallélogramme $ABCD$
 égal au Parallélogramme $MBCN$.

Ou bien retranchant de ces deux Triangles égaux Fig. 112:
 le même Triangle DOM , il restera deux Trapèzes
 égaux $ABOD$, $MOCN$; & ajoûtant à ces deux
 Trapèzes égaux le même Triangle BOC , on aura
 deux Parallélogrammes égaux $ABCD$, $MBCN$.

Donc dans les deux Figures 111, 112, les Parallé-
 logrammes $ABCD$, $MBCN$, qui ont même base
 BC , & qui sont compris entre mêmes Parallèles
 AN , BZ , sont égaux.

COROLLAIRE I.

134 Donc deux Parallélogrammes sont égaux;
 quand ils ont bases égales & hauteurs égales. Car
 ayant bases égales, on peut les mettre sur une même
 base, & ayant hauteurs égales, ils peuvent être entre
 les mêmes Parallèles. (N^o. 128.).

COROLLAIRE II.

135 Donc deux Parallélogrammes $ABCD$, Fig. 113:
 $OBCP$, ne sont pas égaux, quand ils ont même base
 BC , & qu'ils ne sont pas compris entre les mêmes
 Parallèles AN , BZ . Car $ABCD = MBCN$.
 (N^o. 133.). Mais $MBCN >$ ou $<$ $OBCP$. Donc
 $ABCD >$ ou $<$ $OBCP$.

COROLLAIRE III.

136 Donc deux Parallélogrammes $ABCD$, Fig. 111
 $MBCN$, sont compris entre les mêmes Parallèles & 112,

AN, BZ , quand ils sont égaux & qu'ils ont même base. Car ayant même base, ils ne seroient pas égaux, s'ils n'étoient pas compris entre les mêmes Parallèles (N^o. 135.).

COROLLAIRE IV.

Fig. 114. I 37 Donc deux Triangles BAC, BMC , sont égaux, quand ils ont même base BC & qu'ils sont compris entre les mêmes Parallèles AN, BZ . Car si l'on tire CD parallèle à BA , & CN parallèle à BM , on aura le Parallélogramme $ABCD = MBCN$ (N^o. 133.): & comme les Triangles BAC, BMC , sont les moitiés de ces Parallélogrammes (N^o. 130.), ils sont égaux.

COROLLAIRE V.

Fig. 115. I 38 Donc les Triangles BAC, BOC , ne sont pas égaux, quand ils ont même base BC , & qu'ils ne sont pas compris entre les mêmes Parallèles AN, BZ . Car le Triangle $BAC = BMC$ (N^o. 137.). Mais $BMC >$ ou $<$ BOC . Donc aussi $BAC >$ ou $<$ BOC .

COROLLAIRE VI.

Fig. 114. I 39 Donc deux Triangles BAC, BMC , sont compris entre les mêmes Parallèles, quand ils sont égaux & qu'ils ont même base BC . Car ayant même base, ils ne seroient pas égaux (N^o. 138.), s'ils n'étoient pas compris entre les mêmes Parallèles.

COROLLAIRE VII.

I 40 Il suit encore que deux Triangles sont égaux, quand ils ont bases égales & hauteurs égales.

Car avoir même base ou bases égales, c'est la

DES PARALLÉLOGRAMMES. 91
 même chose; & avoir hauteurs égales, c'est pouvoir
 être compris entre les mêmes Parallèles (N^o. 128.).

COROLLAIRE VIII.

141 Donc si plusieurs Triangles AMB , BNC , COD , DPE , &c, dont toutes les bases AB , DC , CD , DE , sont bout à bout sur une Ligne droite AE , ont même hauteur, ils seront tous ensemble égaux au seul Triangle AME , qui aura la même hauteur, & dont la base sera la somme AE des bases de tous ces Triangles. Car tous ces Triangles qui ont même hauteur pourront être compris entre les mêmes Parallèles MP , AE (N^o. 128.).

Or (N^o. 137.) si l'on tire les Droites MC , MD , ME , les Triangles AMB , BNC , COD , DPE , seront égaux aux Triangles AMB , BMC , CMD , DME , chacun à chacun. Mais $AMB + BMC + CMD + DME = AME$. Donc $AMB + BNC + COD + DPE = AME$.

THÉORÈME.

142 Un Parallélogramme $ADCB$ est égal au produit de sa Base DC & de sa Hauteur perpendiculaire AE . Fig. 103.

DÉMONSTRATION.

Le Parallélogramme $ADCB$ a été produit par sa base DC menée parallèlement à elle-même le long du côté DA ; & la base DC étant transportée en AB par ce mouvement, s'est éloignée de sa première position d'une quantité égale à la Perpendiculaire AE comprise entre les deux Parallèles AB , DC .

Or on peut supposer que cette Ligne génératrice,

92 *Liv. II. Chap. II. DES PARALLÉLOGRAMMES.*

en s'éloignant de sa première position DC , & en passant successivement par tous les Points de la Droite AE qui lui est perpendiculaire, a engendré à chacun de ses Points une Ligne droite égale à elle-même; en sorte qu'elle a rempli la surface du Parallélogramme, d'autant de Lignes égales à DC , qu'il y a de Points dans la hauteur AE .

Donc on aura l'aire ou la surface du Parallélogramme $ADCB$, en répétant sa base DC autant de fois qu'il y a de Points dans sa hauteur AE , c'est-à-dire, en multipliant la base DC par le nombre des Points de la hauteur AE .

Mais le nombre des Points de la hauteur AE ne peut pas être mieux exprimé que par la hauteur AE elle-même.

Donc enfin le Parallélogramme $ADCB$ est égal au produit de sa base DC multipliée par sa hauteur AE . *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Fig. 103. I 43 1°. Si le Parallélogramme $ADCB$ est un Rhomboïde, on ne pourra avoir sa hauteur, qu'en abaissant une Perpendiculaire AE ou BF d'un Point quelconque de sa base supérieure AB à sa base inférieure DC prolongée s'il est nécessaire. Ainsi pour avoir la surface de ce Parallélogramme, on commencera par mener cette Perpendiculaire à la base DC ; & l'on multipliera ensuite cette base & cette Perpendiculaire l'une par l'autre: ce qui donnera $DC \times AE$, ou $AE \times DC$, pour la surface du Parallélogramme $ADCB$.

Fig. 104. 2°. Si le Parallélogramme $ADCB$ est rectangle, ses côtés contigus AD , DC , seront perpendiculaires l'un à l'autre. Ainsi le côté AD ou BC , con-

élevé à la base DC , servira de hauteur ; & l'on aura la surface du Rectangle $ADCB$, en multipliant l'un par l'autre deux côtés contigus de ce Rectangle : c'est-à-dire, qu'on aura $ADCB = DC \times AD$ ou $= DC \times BC$.

3°. Si le Parallélogramme $ADCB$ est un Quarré, Fig. 105 : ses côtés contigus AD , DC , seront égaux & perpendiculaires l'un à l'autre. Ainsi non seulement on pourra prendre pour sa hauteur le côté AD ou BC contigu à sa base DC ; mais on pourra prendre encore le même côté AD ou DC ou BC pour la base & pour la hauteur de ce Quarré : en sorte que sa surface sera égale au produit $AD \times AD$ ou $DC \times DC$ ou $BC \times BC$ d'un côté multiplié par lui-même.

Mais au lieu d'écrire $AD \times AD$ ou $DC \times DC$ ou $BC \times BC$, on écrit ordinairement pour abréger \overline{AD}^2 ou \overline{DC}^2 ou \overline{BC}^2 . Ainsi ces expressions \overline{AD}^2 , \overline{DC}^2 , \overline{BC}^2 , représentent un Quarré dont AD ou DC ou BC est le côté.

COROLLAIRE II.

144 Un Triangle DAC est (N°. 130.) la moitié d'un Parallélogramme $ADCB$ qui a même base DC & même hauteur AE que ce Triangle. Ainsi pour avoir l'aire d'un Triangle, il faut prendre la moitié du produit qui représente l'aire d'un Parallélogramme de même base & de même hauteur que ce Triangle. Fig. 117 & 118.

Mais l'aire du Parallélogramme $ADCB$, qui a même base & même hauteur que le Triangle DAC , est égale au produit $DC \times AE$ de sa base multipliée par sa hauteur (N°. 142 & 143.).

Donc la surface ou l'aire du Triangle DAC

94 Liv. II. Chap. II. DES PARALLÉLOGRAMMES.

est égale à la moitié du produit $DC \times AE$ de sa base & de sa hauteur ; c'est-à-dire, que le Triangle $DA C = \frac{DC \times AE}{2}$ ou $= DC \times \frac{AE}{2}$ ou $= \frac{DC}{2} \times AE$.

Il est évident que si le Triangle $DA C$ n'est pas rectangle, on sera obligé de mener une Perpendiculaire AE de son sommet A sur la base DC prolongée s'il est nécessaire, pour avoir sa hauteur, & pour exprimer sa surface.

Fig. 119. Mais si le Triangle $DA C$ est rectangle, les côtés DC , AD , adjacens à l'Angle droit D , seront perpendiculaires l'un à l'autre. Ainsi l'un pouvant être pris pour la base, & l'autre pour la hauteur du Triangle $DA C$, on aura l'aire de ce Triangle en multipliant l'un par l'autre ses deux côtés DC , AD , contigus à l'Angle droit D , & en prenant la moitié de leur produit $DC \times AD$; c'est-à-dire, que le Triangle rectangle $DA C = \frac{DC \times AD}{2}$ ou $= DC \times \frac{AD}{2}$ ou $= \frac{DC}{2} \times AD$.

COROLLAIRE III.

145 Il suit du Théorème & des Corollaires précédens, que

Fig. 103 & 104. 1°. Pour représenter géométriquement le produit $DC \times AE$ de deux Lignes, on pourra faire un Parallélogramme $ADCB$, qui ait pour base l'un DC des deux Facteurs de ce produit, & pour hauteur l'autre Facteur AE du même produit ; ou bien faire un Parallélogramme rectangle $ADCB$ (Fig. 104.), dont deux côtés contigus DC , AD , soient égaux aux deux Facteurs DC , AE , de ce produit.

Fig. 105. 2°. Pour représenter $AD \times AD$ ou \overline{AD}^2 , on pourra faire un Quarré dont chacun des côtés soit égal à AD .

Fig. 117 & 118. 3°. Pour représenter $\frac{DC \times AE}{2}$ ou $DC \times \frac{AE}{2}$ ou $\frac{DC}{2} \times AE$, on pourra faire un Triangle $DA C$.

DES PARALLÉLOGRAMMES. 97

qui ait pour base l'une DC des deux Lignes DC , AE , & qui ait pour hauteur l'autre Ligne AE ; ou bien faire un Triangle rectangle DAC , dont les deux côtés DC , AD , contigus à l'Angle droit D , soient égaux aux deux Lignes DC , AD . Fig. 119.

REMARQUE.

146 Lorsque les côtés contigus DC , AD , d'un Parallélogramme rectangle $ADCB$, sont évalués en mesures quelconques arbitraires ou établies par l'usage, & qu'on multiplie le nombre des mesures contenues dans la base DC par le nombre des mesures contenues dans le côté contigu AD ; le produit de la multiplication est le nombre des mesures quarrées contenues dans la surface du Parallélogramme $ADCB$, & chacune de ces mesures quarrées a pour côté la mesure dont on s'est servi pour évaluer la longueur des côtés contigus DC , AD . Fig. 120.

Par exemple, si la base DC du Parallélogramme rectangle $ADCB$ est de 5 Toises, & que le côté AD soit de 6 Toises; en multipliant 5 par 6, le produit 30 de la multiplication sera le nombre des Toises quarrées contenues dans la surface du Parallélogramme.

Car supposant que les parties égales DE , EF , FG , &c. représentent les Toises contenues dans la base DC , & que les parties DI , IK , KL , LM , &c. représentent les Toises contenues dans le côté AD contigu à la base; si par les Points I , K , L , M , &c. qui sont les bouts des Toises contenues dans la hauteur, on mene des Parallèles IO , KP , LQ , MR , &c. à la base DC , on divisera le Parallélogramme rectangle $ADCB$ en autant de Rectangles égaux DO , IP , KQ , LR , &c. qu'il y aura de Toises dans le côté AD . Ainsi il est évident que l'on

aura la surface du Parallélogramme rectangle $ADCB$, en multipliant un de ces Rectangles, par exemple, le Rectangle DO , par le nombre des Toises du côté AD .

Mais le Rectangle DO ayant une Toise de large; & ayant la même longueur que la base DC , contient évidemment autant de Toises quarrées qu'il y a de Toises dans la Base DC .

On aura donc le nombre des Toises quarrées contenues dans le Parallélogramme $ADCB$, en multipliant le nombre des Toises contenues dans la base DC par le nombre des Toises contenues dans le côté AD contigu à cette base. Ainsi les côtés contigus DC , AD , du Parallélogramme $ADCB$, étant l'un de 5 Toises & l'autre de 6 Toises, le produit 30 de 5 multiplié par 6 sera le nombre des Toises quarrées contenues dans le Parallélogramme $ADCB$.

Fig. 103. Lorsqu'un Parallélogramme $ADCB$ est Rhomboïde, si des extrémités A , B , de l'un de ses côtés; ou abaisse deux Perpendiculaires AE , BF , sur le côté opposé, on formera un Parallélogramme rectangle $AEFB$, qui sera égal au Rhomboïde $ADCB$; & comme on aura le nombre des mesures quarrées contenues dans la surface du Parallélogramme rectangle $AEFB$, en multipliant le nombre des mesures de la base EF par le nombre des mesures du côté AE contigu à cette base, on aura aussi le nombre des mesures quarrées contenues dans le Rhomboïde $ADCB$, en multipliant le nombre des mesures de EF ou AB ou DC par le nombre des mesures contenues dans la Perpendiculaire AE .

Fig. 117 & 118. Puisqu'un Triangle DAC est (N^o. 130.) la moitié d'un Parallélogramme $ADCB$ de même base DC & de même hauteur AE que ce Triangle, & qu'on aura le nombre des mesures quarrées contenues dans

dans le Parallélogramme $ADCB$, en multipliant le nombre des mesures de sa base DC par le nombre des mesures de sa hauteur AE , on aura évidemment le nombre des mesures quarrées contenues dans le Triangle DAC , en tirant une Perpendiculaire AE de son sommet à sa base DC prolongée s'il est nécessaire, & en multipliant le nombre des mesures qu'on trouvera dans la base DC par le nombre des mesures qui seront dans la hauteur AE .

Comme la méthode pour faire ces Multiplications a été suffisamment expliquée dans l'article du Toisé qui fait partie de l'Arithmétique, & qui se trouve aux Numéros 90 & suivans de ce Traité, nous pouvons nous dispenser d'en parler ici.

CHAPITRE III.

Des Polygones.

147 **O**N appelle en général Polygone une Figure rectiligne dont on ne détermine pas le nombre des Angles où des côtés; & lorsqu'on veut distinguer ces Figures les unes des autres, c'est toujours par le nombre de leurs Angles ou par le nombre de leurs côtés, comme nous l'avons dit (N^o. 101.).

DÉFINITIONS.

148 Un Polygone $ABCDEF$ est *régulier*, lorsqu'il peut avoir tous ses Angles à la Circonférence d'un même Cercle, & que tous ses côtés sont égaux.

Fig. 1214

Un Polygone est *irrégulier*, quand il n'a pas tous ses côtés égaux, ou qu'il ne peut pas avoir tous ses Angles à la Circonférence d'un même Cercle.

Une Perpendiculaire KG , tirée du Centre K du Cercle sur un côté AB du Polygone régulier, se nomme *Apothème* de ce Polygone.

Géom.

G *

COROLLAIRE I.

Fig. 121. I49 Donc si l'on tire des Droites du Centre K à tous les Angles d'un Polygone régulier, tous les Triangles AKB , BKC , CKD , &c, dans lesquels le Polygone sera divisé, seront parfaitement égaux entr'eux. Car ayant chacun pour côtés deux Rayons & un côté du Polygone, ils auront les trois côtés égaux chacun à chacun.

COROLLAIRE II.

Fig. 121. I50 Donc tous les Triangles BKG , BKH , CKH , CKI , &c. qu'on fera dans un même Polygone régulier, en le divisant par des Rayons BK , CK , &c, & par des Apothèmes KG , KH , KI , &c seront parfaitement égaux; & les Apothèmes KG , KH , KI , &c. seront par conséquent égaux.

Car les Triangles AKB , BKC , CKD , &c étant isosceles & parfaitement égaux (N^o. 149.), les Angles GBK , HBK , HCK , ICK , &c. seront tous égaux; & les Apothèmes KG , KH , KI , &c. étant des Perpendiculaires menées du Centre K , sur les Cordes égales AB , BC , CD , &c. qui servent de côtés au Polygone régulier, tomberont sur les milieux de ces Cordes (N^o. 70.): en sorte que toutes les Demi-cordes BG , BH , CH , CI , &c. seront égales entr'elles. Donc les Angles égaux GBK , HBK , HCK , ICK , &c. seront compris entre des Rayons égaux BK , CK , &c. & des Demi-cordes égales BG , BH , CH , CI , &c; & par conséquent (N^o. 116.) les Triangles rectangles GBK , HBK , HCK , ICK , &c. seront parfaitement égaux: d'où il suit que les Apothèmes KG , KH , KI , &c. seront aussi parfaitement égaux.

T H É O R È M E.

151 *Lorsqu'une Corde AB est égale au Rayon du Cercle, l'Arc qu'elle soutient est égal à la sixième partie de la Circonférence.* Fig. 121.

D É M O N S T R A T I O N.

Soient tirés les Rayons KA , KB , aux extrémités de la Corde AB qu'on suppose égale au Rayon du même Cercle, le Triangle AKB qu'on formera sera équilatéral, & ses trois Angles seront par conséquent égaux (N°. 112.): & comme ces trois Angles ont ensemble pour mesure la moitié de la Circonférence, l'Arc AB qui sert de mesure à l'un d'eux, savoir, à l'Angle AKB , sera le tiers de la Demi-circonférence, ou la sixième partie de la Circonférence entière. Ainsi lorsqu'une Corde AB est égale au Rayon, l'Arc AB qu'elle soutient est égal à la sixième partie de la Circonférence. *Ce qu'il falloit démontrer.*

C O R O L L A I R E.

152 On divisera donc exactement la Circonférence d'un Cercle en six parties égales, par le moyen de la même ouverture de Compas qui a servi à la décrire.

Comme en divisant la Circonférence du Cercle en six parties égales, & en tirant six Cordes par les six Points de division, l'on fait un Exagone régulier, il est évident que le côté d'un Exagone régulier est égal au Rayon du Cercle à la Circonférence duquel les Angles de l'Exagone sont placés.



R E M A R Q U E.

Fig. 121. 153 Pour diviser la Circonférence d'un Cercle en Degrés , c'est-à-dire., en 360 parties égales , on mene d'abord par le Centre *K* deux Diametres *AB*, *CD* , perpendiculaires l'un à l'autre , & qui divisent par conséquent la Circonférence en quatre parties égales (*Nº. 83.*). Ensuite , sans rien changer à l'ouverture du Compas dont on a décrit la Circonférence , on en place la pointe à l'extrémité *A* d'un Diametre , & l'on marque avec l'autre pointe sur la Circonférence deux Points *E*, *F* , qui donnent les deux Arcs *AE*, *AF*, égaux chacun à la sixième partie de la Circonférence : & comme la Circonférence de tout Cercle contient 360 Degrés, les Arcs *AE*, *AF*, seront chacun de 60 Degrés (*Nº. 151.*) ; en sorte que les complémens *EC*, *FD*, de ces Arcs, seront chacun de 30 Degrés.

Appuyant ensuite en *B* une pointe du Compas toujours ouvert de la même quantité , on marque sur la Circonférence avec l'autre pointe deux Points *G*, *H* , qui donnent par la même raison les Arcs *BG*, *BH*, chacun de 60 Degrés , & les deux Arcs *GC*, *HD*, chacun de 30 Degrés.

On fait de la même maniere les quatre Arcs *CI*, *CM*, *DL*, *DN*, chacun de 60 Degrés, en appliquant successivement une pointe du Compas en *C* & *D* ; ce qui donne les quatre complémens *AI*, *BM*, *AL*, *BN*, de ces quatre Arcs , chacun de 30 Degrés.

Par cette opération, la Circonférence du Cercle se trouve divisée en douze Arcs égaux *AI*, *IE*, *EC*, *CG*, *GM*, *MB*, &c. chacun de 30 Degrés.

On divise ensuite (*Nº. 82.*) chacun de ces douze Arcs en deux parties égales ; ce qui donne 24 Arcs chacunde 15 Degrés.

Comme il n'y a point de méthode géométrique pour achever la division de ces 24 Arcs en 15 parties égales, on cherche en tâtonnant une ouverture de Compas qui puisse diviser chacun d'eux en trois parties égales; puis on cherche une nouvelle ouverture de Compas qui divise chacune de ces parties en cinq autres parties égales. Toutes ces opérations étant faites, la Circonférence se trouve divisée en 360 parties égales.

Les divisions qu'il faut faire pour diviser en Degrés un Cercle déjà partagé en quatre parties égales, sont énoncées dans ce Vers latin :

In tres, in binas, in tres, in quinque secato.

Il est aisé de voir par ce qui vient d'être dit de la Division de la Circonférence, qu'on peut construire géométriquement des Polygones de 3, de 4, de 6, de 12, de 24, & d'un nombre de côtés continuellement doublé.

Comme deux Diamètres perpendiculaires l'un à l'autre divisent la Circonférence du Cercle en quatre parties égales, & qu'on sait diviser & subdiviser continuellement un Arc en deux parties égales (No. 68.), il est clair qu'on a le moyen de décrire un Polygone régulier de 4, de 8, de 16, de 32, & d'un nombre quelconque de côtés continuellement doublé.

Nous verrons dans la suite qu'on peut diviser géométriquement la Circonférence d'un Cercle en 5 & en 10 parties égales: & comme chacune de ces parties peut être facilement divisée en deux également, nous en concluons qu'on peut construire géométriquement des Polygones de 5, de 10, & d'un nombre quelconque de côtés composé de 5 multiplié continuellement par 2.

Par la division géométrique de la Circonférence

en 5 parties égales qui valent chacune 72 Degrés ; & par la division de la même Circonférence en 6 parties égales qui font chacune de 60 Degrés , on trouve un Arc de 12 Degrés qui font la trentième partie de 360 Degrés ou de la Circonférence entière. Ainsi l'on peut diviser géométriquement la Circonférence du Cercle en 30 parties égales , & par conséquent en 15 & dans un nombre de parties égales continuellement double de 30 , c'est-à-dire, en 60 , 120, &c parties égales.

Comme on n'a point trouvé jusqu'ici de moyens géométriques pour diviser la Circonférence d'un Cercle en d'autres nombres de parties égales que ceux dont nous venons de parler , lorsqu'on aura un Polygone régulier à construire , dont le nombre des côtés ne sera pas 3 ou 4 ou 5 ou 15, ou ne sera pas continuellement double de ceux-ci , il faudra chercher en tâtonnant une ou plusieurs ouvertures de Compas , pour diviser la Circonférence du Cercle en autant de parties égales que le Polygone doit avoir de côtés.

SCHOLIE.

Fig. 123. 154 On déduit de ce Théorème une méthode pour élever une Perpendiculaire AD à l'extrémité A d'une Droite AB .

Du Point donné A comme Centre , & d'un Rayon pris à volonté , on décrira un Arc EFG qui rencontrera la Droite AB en un Point E ; puis on portera le Rayon sur cet Arc de E en F & de F en G : ce qui donnera deux Arcs EF , FG , égaux chacun à la sixième partie de la Circonférence , ou à 60 Degrés. Ensuite des Points F , G , comme Centres , & d'une même ouverture de Compas , on décrira deux Arcs MN , OP , qui se couperont en un Point D également éloigné des deux Centres F , G ; & l'on

mènera par ce Point D & par le Point A une Droite DA qui sera perpendiculaire sur la Corde FG (N^o . 40.), & qui (N^o . 68.) coupera l'Arc FG en deux parties égales, en sorte que l'Arc FH sera de 30 Degrés : & comme l'Arc EF est de 60 Degrés, l'Arc EFH sera de 90 Degrés, & l'Angle DAB sera par conséquent droit ; d'où il suit que la Droite AD sera perpendiculaire sur la Droite AB .

THÉORÈME.

155 *La surface d'un Polygone régulier quelconque $ABCDEF$ est égale à un Triangle AKH dont la base AH est égale au contour de ce Polygone, & dont la hauteur est égale à l'Apothème KG du même Polygone.* Fig. 124

DÉMONSTRATION.

Du Centre K soient menés des Rayons à tous les Angles du Polygone qu'on suppose régulier : on le divisera en autant de Triangles égaux qu'il aura de côtés (N^o . 149.) ; & ces Triangles ayant pour hauteur l'Apothème du Polygone, seront tous de même hauteur.

Mais (N^o . 141.) si l'on met de suite sur une même Droite AH les bases AB , BC , CD , &c de tous ces Triangles, c'est-à-dire, si l'on développe en une Ligne droite AH le contour du Polygone, & que sur AH comme base, on fasse un Triangle AKH ; lequel ait pour hauteur l'Apothème qui sert de hauteur à tous ces Triangles, ce Triangle AKH sera égal à la somme des Triangles qui composent le Polygone $ABCDEF$, & dont les bases auront été mises en Ligne droite.

Donc la surface d'un Polygone régulier quelconque $ABCDEF$ est égale au Triangle AKH , dont

la base AH est égale au contour du Polygone régulier, & dont la hauteur est égale à l'Apothème KG de ce Polygone.

COROLLAIRE I.

Fig. 144. 156 Mais la surface d'un Triangle AKH est égale à la moitié du produit de sa base AH multipliée par sa hauteur KG (N^o. 44.). Donc la surface d'un Polygone régulier quelconque $ABCDEF$ est égale à la moitié du produit fait de son contour multiplié par son Apothème KG .

COROLLAIRE II.

157 Lorsqu'un Polygone régulier est renfermé par une infinité de côtés, son contour diffère infiniment peu de la Circonférence du Cercle, & son Apothème n'est pas moindre que le Rayon, d'une quantité finie. Ainsi un Polygone régulier d'une infinité de côtés, & le Cercle dans lequel il est décrit, peuvent être regardés comme égaux en toutes choses.

Donc puisque la surface du Polygone régulier en général est égale à un Triangle dont la base est de même longueur que le contour de ce Polygone, & dont la hauteur est la même que son Apothème, lorsque ce Polygone aura une infinité de côtés, sa surface sera égale à un Triangle qui aura pour base la Circonférence du Cercle de ce Polygone, & pour hauteur le Rayon du même Cercle : & comme la superficie du Cercle lui-même peut être prise pour celle de ce Polygone d'une infinité de côtés, il est clair que la surface d'un Cercle est égale à celle d'un Triangle qui a pour base la Circonférence de ce Cercle, & pour hauteur le Rayon du même Cercle.

On pourroit donc faire une Figure rectiligne égale à la surface d'un Cercle ; & l'on auroit ce qu'on appelle la Quadrature du Cercle, si l'on pouvoit trouver une Ligne

droite égale à une Circonférence dont on connoît le Rayon. Quoique ce Problème n'ait point été résolu, & qu'on désespere qu'il le soit jamais, on a des moyens de trouver avec autant de précision qu'on peut le desirer la valeur de la Circonférence. On trouvera (N^o. 594 & suiv.) différens Rapports plus ou moins exacts du Diametre à la Circonférence. On y verra entr'autres que le Diametre ou le Rayon d'un Cercle étant représenté par 7, sa Circonférence ou sa Demi-circonférence le sera par 22 à peu de chose près ; c'est-à-dire, qu'on aura la Circonférence ou la Demi-circonférence d'un Cercle avec assez de précision pour la Pratique, en multipliant son Diametre ou son Rayon par 3 & $\frac{1}{7}$.

Ainsi, puisque l'aire du Cercle est égale à un Triangle qui a pour hauteur le Rayon & pour base la Circonférence, ou à un Rectangle d'une hauteur ou d'une base moindre de moitié ; on pourra prendre pour la surface du Cercle un Triangle qui aura pour hauteur le Rayon & pour base trois fois le Diametre plus la septième partie de ce Diametre, ou un Parallélogramme qui aura la même base avec une hauteur égale au Demi-rayon, ou enfin un Parallélogramme qui aura pour hauteur le Rayon & pour base trois fois le Rayon avec sa septième partie.

Un Secteur DKBCA, ou DKCA, ou DKA, qui est Fig. 122.
contient que les trois quarts ou la moitié ou le quart de la Circonférence, ne valant que les trois quarts ou la moitié ou le quart du Cercle, & étant par conséquent égal à un Triangle de même hauteur que le Rayon, & dont la base vaut les trois quarts ou la moitié ou le quart de la Circonférence ; on en trouvera la surface en le considérant comme un Triangle de même hauteur que le Rayon, & d'une base égale aux trois quarts, à la moitié, ou au quart d'une Ligne égale à trois fois le Diametre plus un septième de ce Diametre. On trouvera de même la surface de tout Secteur de Cercle, quand on connoîtra le Rapport de son Arc à la Circonférence entière.

R E M A R Q U E.

Fig. 122. 158 Puisqu'on fait trouver la surface d'un Secteur quelconque $AKDFL$ de Cercle avec une précision suffisante dans la Pratique, & qu'on peut avoir l'aire du Triangle AKD compris entre les deux Rayons AK , DK , & la Corde AD ; il est évident qu'en cherchant séparément l'aire du Secteur $AKDFL$ & l'aire du Triangle AKD , & qu'en ôtant l'aire du Triangle de celle du Secteur, on aura l'aire du Segment $ADFL$.

Fig. 125
126 & 127. Comme tout Polyg. rectiligne irrégulier $ABCDEF$ peut être partagé en Triangles, par des Lignes tirées de tel point H qu'on voudra à tous ses Angles, & qu'on peut avoir (N° 146.) la surface de chaque Triangle; il est évident qu'on est en état de trouver la surface de tous les Polygones rectilignes irréguliers.

Fig. 128. Si quelques côtés BGC , CHD , $DIEKF$, du Plan $ABGCHDIEKF$, étoient des Arcs de Cercles, on en pourroit trouver la surface, en tirant les Cordes BC , CD , DF , de ces côtés courbes, pour partager le Plan proposé en un Polygone rectiligne $ABCDF$, & en autant de Segmens circulaires BGC , CHD , $DIEKF$, qu'on a de côtés courbes. Car en cherchant séparément la surface du Polygone rectiligne & celle de chaque Segment, & additionnant ensuite les aires de toutes ces Figures, on auroit celle du Plan mixtiligne proposé.

Il n'est pas nécessaire pour faire usage de cette pratique, que les côtés courbes soient exactement des Arcs de Cercles; il suffit qu'ils en approchent assez, pour que l'erreur qu'on peut commettre en les considérant comme des Arcs de Cercles ne soit pas sensible.

Si le Plan mixtiligne avoit quelque côté courbe tel que $DIEKF$, qui ne pût pas être regardé comme un Arc de Cercle, sans induire dans une erreur sensible, on pourroit partager ce côté courbe en

deux parties DIE , EKF , dont chacune approcheroit davantage de la figure d'un Arc de Cercle que l'Arc total n'en approchoit; & tirant les deux Cordes DE , EF , on chercheroit séparément les aires des deux Segmens DIE , EKF , qu'on joindroit avec les autres parties qu'on suppose trouvées. Enfin si les deux parties DIE , EKF , du côté courbe $DIEKF$, étoient encore trop différentes de deux Arcs de Cercles pour y être rapportées, on partageroit ce côté courbe en trois ou quatre ou cinq, ou en autant de parties qu'on jugeroit nécessaires, pour que chacune pût être considérée comme un Arc de Cercle; & après avoir tiré les Cordes de ces parties courbes pour partager le Plan proposé en un Polygone rectiligne, & en autant de Segmens qu'on auroit de parties courbes, on chercheroit, comme nous l'avons dit, les aires de ce Polygone & de tous les Segmens. Enfin l'on additionneroit ensemble toutes les valeurs des parties dans lesquelles le Plan seroit divisé; & l'on auroit l'aire totale du Plan mixtiligne proposé.

CHAPITRE IV.

*De la Réduction, de l'Addition, Soustraction, Multiplication
& Division des Figures rectilignes.*

PROBLÈME.

159 Élever ou abaisser un Triangle BAC à une hauteur donnée, sans changer l'étendue de sa superficie. Fig. 129,
130, 131
& 132.

SOLUTION.

On choisira un Point D qui soit élevé au-dessus de la base BC d'une quantité égale à la hauteur qu'il

faut donner au nouveau Triangle qu'on demande ; & l'on prendra ce Point D pour le sommet du Triangle qu'il faut construire.

Fig. 129
& 130.

1^o. Si le Point D a été pris ou donné sur un côté BA du Triangle BAC , ou sur le prolongement de ce côté, du Point D on tirera une Droite DC à l'Angle opposé C , & on lui mènera par le sommet A une Parallèle AE , qui rencontrera en E la base BC ou son prolongement. Puis on tirera la Droite DE ; & l'on aura un Triangle BDE qui fera égal au Triangle BAC , & qui aura la hauteur demandée. *Ce qu'il falloit trouver.*

Pour démontrer que les Triangles BDE , BAC , sont égaux, on remarquera que les Triangles DAC , DEC , qui ont même base DC , & qui sont compris entre mêmes Parallèles DC , AE , sont égaux (*N^o. 137.*). Ainsi (*Fig. 129.*) si l'on ajoute ces deux Triangles égaux au même Triangle BDC , ou bien (*Fig. 130.*) si on les retranche du même Triangle BDC , il en résultera les deux Triangles égaux BAC , BDE .

Fig. 131
& 132.

2^o. Si le Point D , qui doit être le sommet du Triangle demandé, n'a point été pris ou donné sur un côté BA du Triangle BAC , ni sur son prolongement, on mènera par ce Point D , & par une extrémité B de la base du Triangle donné, une Droite indéfinie BD , que l'on coupera par une Droite Aa menée par le sommet A parallèlement à la base BC . Puis du Point de section a on mènera à l'autre extrémité C de la base du Triangle donné, une Droite aC ; & l'on aura un Triangle BaC égal au Triangle donné BAC .

Le Point D , où il faut placer le sommet du Triangle qu'on doit construire, étant sur le côté Ba du Triangle BaC , ou sur le prolongement de ce côté,

& le Triangle BDE qu'on demande devant être égal au Triangle BAC , ou à son égal BaC , on construira le Triangle BDE , comme il a été expliqué dans le premier cas ; c'est-à-dire, qu'on tirera DC , & que lui ayant mené une Parallèle aE , on tirera la Droite DE qui donnera un Triangle BDE tel qu'on le demande.

COROLLAIRE.

160 Si l'on veut convertir le Triangle BAC Fig. 131
en un autre BDE de même valeur, dont la hau- & 132.
teur & l'Angle DBE soient donnés, on mènera la Droite indéfinie BDa qui fasse avec BC l'Angle qu'on demande. Puis on prendra sur BDa un Point D qui soit élevé au-dessus de BC d'une quantité égale à la hauteur qu'il faut donner au Triangle BDE qu'on veut construire ; & le Point D , où il faut placer le sommet de ce Triangle, étant ainsi déterminé, on construira ce Triangle BDE , comme il a été dit dans la solution du Problème.

PROBLÈME.

161 Réduire une Figure rectiligne $ABCDE$ à une Fig. 133
Figure $ABFE$ qui lui soit égale, & qui ait un côté de & 134.
moins.

SOLUTION.

Par les extrémités des deux côtés DE , DC , d'un même Angle D de la Figure proposée, on tirera une Droite EC , & on lui mènera par le sommet D de cet Angle une Parallèle DF qui sera terminée en F par le côté BC ou par son prolongement. Ensuite on tirera la Droite EF ; & l'on aura un nouveau Polygone $ABFE$ qui sera égal au proposé $ABCDE$, & qui aura un côté de moins que lui. Ce qu'il falloit trouver.

Car les deux Triangles EDC , EFC , qui ont même base EC & qui sont compris entre mêmes Parallèles, sont égaux (N^o. 137.). Ainsi (Fig. 133.) en ajoutant chacun de ces Triangles avec $ABCE$, ou bien (Fig. 134.) en les retranchant de $ABCE$, on trouvera la Figure proposée $ABCDE$ égale à la nouvelle Figure $ABFE$ qui a un côté de moins.

COROLLAIRE I.

162 Donc toute Figure rectiligne peut être réduite en Triangle. Car on la réduira d'abord à une autre Figure qui aura un côté de moins; celle-ci se réduira ensuite à une nouvelle Figure qui aura encore un côté de moins; & toujours ainsi de suite, jusqu'à ce que la Figure soit réduite en Triangle.

Fig. 135
& 136.

Par exemple, si l'on propose de réduire le Polygone $ABCDEF$ en un Triangle IAH qui ait le sommet A à la Circonférence du Polygone, & la base sur le côté CD prolongé de part & d'autre;

1^o. Par l'extrémité D du côté CD , on tirera la Diagonale DF qui séparera du Polygone proposé un Triangle DEF . Puis ayant mené parallèlement à DF la Droite EG qui rencontrera en G le prolongement de CD , on tirera la Droite FG ; & l'on aura, par cette première opération, un Polygone $ABCGF$ qui (N^o. 161.) sera égal au Polygone proposé, & aura un côté de moins.

2^o. Le Polygone proposé $ABCDEF$ étant réduit au Polygone $ABCGF$, on ne considérera plus que ce dernier pour le réduire en un autre $ABCH$ qui ait encore un côté de moins. Pour cela on tirera la Droite AG , & on lui mènera une Parallèle FH qui rencontrera le prolongement de CD en H . Puis on tirera AH ; ce qui donnera le nouveau Polygone $ABCH$ égal au précédent $ABCGF$, & par conséquent égal au Polygone proposé $ABCDEF$.

3°. Le dernier Polygone $ABCH$ auquel le proposé a été réduit, ayant un côté AH qui peut servir de côté au Triangle IAH que l'on doit construire, on n'aura plus à réduire que la partie ABC . Pour cela on tirera la Droite AC , & on lui mènera une Parallèle BI qui rencontrera en I le prolongement de la base DC . Puis on tirera AI ; & le Polygone $ABCDE F$ se trouvera réduit en un Triangle IAH tel qu'on le demande.

Dans la Figure 135, le Point A donné pour le sommet du Triangle auquel le Polygone devoit être réduit, a été pris au sommet de l'un des Angles du Polygone; & dans la Figure 136, le même Point A a été pris sur un côté du Polygone. Ainsi la Construction est la même, pour réduire un Polygone à un Triangle qui ait son sommet à l'un des Angles du Polygone, & pour le réduire à un Triangle qui ait le sommet sur un côté du Polygone.

COROLLAIRE II.

163 Comme un Triangle peut toujours être transformé (N°. 159.) en un autre Triangle de telle hauteur qu'on veut; qu'on peut placer le sommet du nouveau Triangle à un Point donné quelconque; qu'on peut même (N°. 160.) faire l'Angle de la base du nouveau Triangle de la grandeur qu'on le demandera; si l'on propoisoit de réduire un Polygone à un Triangle qui eut le sommet à un Point donné quelconque au dedans ou au dehors du Polygone, ou qui fût d'une hauteur donnée, & qui eut un Angle à la base d'une certaine grandeur, on commenceroit par réduire ce Polygone à un Triangle qui auroit son sommet au sommet de l'un des Angles ou sur un côté du Polygone: ensuite on convertiroit ce Triangle en un autre qui auroit les conditions demandées.

COROLLAIRE III.

Fig. 137. **164** Si la Figure est un Parallélogramme $EBCD$, le Triangle BEF , auquel on le réduira, aura une base BF double de celle BC du Parallélogramme, lorsque son sommet E fera dans le côté opposé à la base de ce Parallélogramme. Car pour réduire le Parallélogramme $EBCD$ au Triangle BEF , on tire sa Diagonale EC , & on lui mene la Parallèle DF qui rencontre le prolongement de la base BC en F ; ce qui donne BF pour la base du Triangle égal au Parallélogramme $EBCD$. Or à cause des Parallèles EC, DF , on a $CF=ED$; & (N^o. 129.) $ED=BC$. Ainsi $CF=BC$: & par conséquent BF est double de BC .

Il suit de là que l'on convertira un Triangle BEF en un Parallélogramme $EBCD$, en menant par son sommet E une Droite ED parallèle à la base BF , & en menant par le milieu C de la base une Parallèle CD au côté BE . Car par cette construction l'on fera un Parallélogramme $EBCD$ égal au Triangle BEF .

SCHOLIE.

Comme on peut avoir besoin de faire sur les Figures rectilignes des opérations semblables à celles qu'on fait en Arithmétique sur les nombres, c'est-à-dire, qu'on peut être obligé d'ajouter plusieurs Figures en une seule; de retrancher une Figure d'une autre; de multiplier une Figure, ou d'en trouver une autre qui contienne un nombre donné de fois celle qui est proposée; de diviser une Figure en un nombre donné de parties égales; nous allons expliquer toutes ces opérations.

DE L'ADDITION DES FIGURES.

165 1°. Si toutes les Figures qu'on veut ajouter ensemble sont des Triangles AMB , BNC , COD , DPE , de même hauteur, on mettra toutes leurs bases AB , BC , CD , DE . bout à bout en Ligne droite AE ; & ayant fait un Triangle AME qui ait AE pour base, & qui ait pour hauteur celle de l'un des Triangles donnés, ce Triangle sera la somme de tous ceux AMB , BNC , COD , DPE ; qu'on vouloit ajouter ensemble (N°. 141.). Fig. 116.

166 2°. Si toutes les Figures qu'on se propose de convertir en un seul Triangle, sont des Triangles de différentes hauteurs, ou sont des Polygones différens quelconques, on réduira toutes ces Figures à des Triangles de même hauteur (N°. 159. ou 162.): ensuite on ajoutera tous ces Triangles de même hauteur en un seul Triangle (N°. 165.).

167 3°. Si le Triangle dans lequel il faut rassembler toutes les Figures données, doit avoir le sommet en un Point donné, ou doit être d'une certaine hauteur déterminée, & doit aussi avoir à sa base un Angle d'une certaine grandeur, on commencera par réduire toutes les Figures proposées en Triangles qui aient tous pour hauteur celle qu'on veut donner au Triangle total; & les Triangles résultans de cette opération étant réduits à un seul Triangle (N°. 165.), on réduira le Triangle total à un autre qui ait son sommet au Point donné (N°. 159.), ou bien on le convertira (N°. 160.) en un autre qui ait une hauteur donnée, & dont un Angle de la base soit tel qu'on le demande.

168 Si toutes les Figures doivent être réduites en un seul Parallélogramme, on les rassemblera d'abord

§ 14 Liv. II. Chap. IV. DE LA MULTIPLICATION &c.
 en un même Triangle : ensuite on réduira ce Triangle
 en Parallélogramme (N^o. 164.).

**DE LA MULTIPLICATION D'UNE FIGURE
 PROPOSÉE.**

Fig. 138. 169 1^o. Pour multiplier un Triangle par un nom-
 bre donné, par exemple, pour multiplier un Trian-
 gle AMB par 4, c'est-à-dire, pour trouver un Trian-
 gle qui soit quadruple du Triangle AMB , on pro-
 longera la base AB de ce Triangle jusqu'en E , de
 manière que AE soit quadruple de AB ; ensuite
 on mènera du sommet au Point E la Droite ME :
 & l'on aura un Triangle AME , qui sera quadruple
 du Triangle proposé AMB .

Car la base AE étant quadruple de AB , sera
 composée de quatre parties égales $AB, BC, CD,$
 DE ; & tirant les Droites MC, MD , les quatre
 Triangles AMB, BMC, CMD, DME , qui au-
 ront des bases égales & même hauteur, seront égaux :
 ainsi leur somme AME sera quadruple du Trian-
 gle AMB .

170 2^o. Si l'on vouloit un Triangle qui fut qua-
 druple d'une Figure rectiligne quelconque, & qui
 eût une hauteur donnée, on réduiroit cette Figure
 en un Triangle de la hauteur donnée, & l'on cher-
 cheroit un autre Triangle qui seroit quadruple de ce
 Triangle, de la même manière qu'on a cherché un
 Triangle AME quadruple du Triangle AMB
 (N^o. 169.).

DE LA SOUSTRACTION DES FIGURES RECTILIGNES.

I.

Fig. 139 & 140. 171 1^o. Si deux Triangles BAC, dac , sont de
 même hauteur, & qu'il faille retrancher le second
 du premier, on ôtera de la base BC du premier

DE LA SOUSTRACTION DES FIGURES &c. 115
 une partie DC égale à la base dc du second : & ayant mené du sommet A au point D la Droite AD , le Triangle BAD sera le Reste de la Soustraction proposée ; c'est-à-dire, que BAD sera la différence des deux Triangles BAC , dac .

Car les Triangles BAC , dac , étant supposés de même hauteur, les deux Triangles DAC , dac , seront aussi de la même hauteur : & comme leurs bases DC , dc , sont égales (*constr.*), ils seront égaux (N^o. 140.). Ainsi BAD étant la différence des deux Triangles BAC , DAC , sera aussi la différence des deux Triangles BAC , dac .

2^o. Si les deux Triangles BAC , dac , n'étoient pas de la même hauteur, & qu'il fallut trouver un Triangle égal à la différence de ces deux Triangles, on réduiroit l'un à la hauteur de l'autre ; ensuite on retrancheroit le plus petit du plus grand, comme on vient de l'expliquer.

3^o. Si l'on proposoit de retrancher un Polygone d'un autre Polygone, & de trouver un Triangle égal au Reste de la Soustraction, l'on réduiroit ces deux Polygones à des Triangles de même hauteur ; ensuite on retrancheroit le plus petit Triangle du plus grand, comme il a été dit.

II.

172 On peut encore retrancher un Triangle donné d'un Polygone quelconque, en tirant dans ce Polygone une Ligne droite par un Point F donné sur l'un de ses côtés.

Pour faire cette Soustraction, supposons que le Triangle qu'on doit retrancher du Polygone $ABCDE$, est converti dans un Triangle MOP , dont la hauteur au-dessus de sa base MP est égale à celle du Point F au-dessus du côté AB contigu à celui sur lequel le Point F a été pris. Cela posé,

H ij

Fig. 1412
 142, 143.
 & 144.

on prendra sur le côté AB , prolongé s'il est nécessaire, une partie AG égale à la base MP du Triangle MOP ; & ayant mené par le Point F la Droite FG , on aura un Triangle AFG égal au Triangle MOP qu'on doit retrancher. Mais il peut arriver trois cas principaux que l'on va détailler.

Fig. 141
& 142.

1°. Si la base MP du Triangle MOP ne surpasse pas le côté AB , & par conséquent si le Point G tombe sur le côté AB , le Problème sera résolu.

Fig. 141,
143 & 144.

Si la base MP du Triangle MOP est plus grande que le côté AB , c'est-à-dire, si le Point G se trouve sur le prolongement du côté AB , on tirera la Droite FB du Point F à l'extrémité du côté AB , & on lui mènera par le Point G une Parallèle GH , qui rencontrera le côté BC ou son prolongement en quelque Point H ; ce qui fera deux cas différens.

Fig. 141
& 143.

2°. Dans le cas où le Point H se trouvera sur le côté BC contigu au côté AB , on mènera par ce Point H & par le Point F une Droite FH , qui retranchera du Polygone proposé un Quadrilatere $FABH$ égal au Triangle donné MOP . Car si l'on tire FG , les Triangles FBG , FBH , de même base & compris entre mêmes Parallèles, seront égaux. Ainsi ajoutant à chacun le Triangle AFB , on aura le Quadrilatere $FABH$ égal au Triangle FAG , & par conséquent égal au Triangle donné MOP .

Fig. 141
& 144.

3°. Dans le cas où la Droite GH parallèle à FB ne rencontrera que le prolongement du côté BC contigu à la base AB , par le Point donné F & l'extrémité C du côté BC adjacent à la base AB , on tirera une Droite FC ; & lui ayant mené par le Point H une Parallèle HI qui coupe le côté suivant en I , on tirera la Droite FI , qui retranchera du Polygone proposé un Pentagone $FABCI$ égal au Triangle donné MOP . Car si l'on tire FH , on aura

toujours , comme ci-dessus , le Quadrilatere $FABH$ égal au Triangle FAG qui est égal au Triangle MOP . Mais les Triangles FCI , FCH , étant égaux (puisqu'ils ont même base FC & qu'ils sont entre mêmes Parallèles); si on leur ajoute la partie commune $FABC$, on aura $FABCI = FABH$. Donc puisque $FABH = MOP$, on aura aussi $FABCI = MOP$.

DE LA DIVISION DES FIGURES RECTILIGNES;

I.

173 1°. Si la Figure qu'on propose de diviser en parties égales , est un Triangle AME , on partagera sa base en autant de parties égales qu'on voudra diviser sa superficie ; & du sommet ayant mené des Lignes droites à tous les Points de division , le Triangle proposé sera partagé en autant de parties égales qu'on le demande. Fig. 138.

Par exemple, si l'on doit partager le Triangle AME en quatre parties égales, on divisera sa base AE en quatre parties égales aux Points B, C, D ; puis on tirera du sommet M à ces Points de division les Droites MB, MC, MD , qui partageront le Triangle proposé AME en quatre parties égales.

2°. Si le Triangle AME qu'on veut partager en quatre parties égales, doit être divisé par des Lignes menées d'un Point m donné sur l'un de ses côtés, on convertira (N°. 159.) le Triangle proposé AME en un autre Ame de même valeur, qui aura son sommet au Point donné m . Ensuite on divisera la base Ae en quatre parties égales aux Points B, C, D ; & l'on mènera par le Point m & par les Points de division B, C, D , des Lignes $mB,$

mC , mD , qui diviseront le Triangle Ame en quatre parties égales AmB , BmC , CmD , Dme ; dont chacune sera par conséquent égale au quart du Triangle proposé AME .

Si les trois Lignes de division mB , mC , mD ; sont toutes entièrement comprises dans le Triangle proposé AME , ces Lignes diviseront le Triangle comme on le demande, & le Problème sera résolu.

Mais s'il se trouve quelque Ligne de division; comme mD , qui sorte du Triangle donné AME pour diviser le Triangle Ame , on tirera la Droite mE ; & lui ayant mené une Parallèle Dd qui coupe le côté ME en d , on tirera la Droite md qui donnera le Quadrilatere $mCEd$ égal au Triangle CmD , ou au quart du Triangle proposé AME .

Les trois parties AmB , BmC , $mCEd$, du Triangle proposé AME , étant égales aux trois Triangles AmB , BmC , CmD , qui sont les trois quarts du Triangle Ame , seront aussi les trois quarts du Triangle proposé AME . Ainsi la quatrième partie mdM sera le quatrième quart du même Triangle; & par conséquent les Droites mB , mC , md , diviseront le Triangle proposé AME en quatre parties égales.

II.

Fig. 146. 174 Si l'on propose de diviser un Polygone $ABCDEF$ en un nombre donné de parties égales, par exemple, en quatre parties égales, par des Droites tirées d'un même Point G situé sur un côté AF de ce Polygone, on pourra le faire par une méthode semblable à celle qu'on a expliquée pour la Soustraction des Figures rectilignes (N^o. 172.).

Pour cela, on convertira le Polygone proposé en un Triangle AGM (N^o. 162.), qui ait le même

met au Point donné G duquel doivent partir toutes les Lignes de division du Polygone. Puis ayant divisé le Triangle AGM en autant de Triangles égaux AGH , HGI , IGK , KGM , qu'on veut avoir de parties égales dans le Polygone, on soustraira de ce Polygone une partie égale au Triangle AGH . Ensuite on en soustraira une partie égale au Triangle AGI , puis une partie égale au Triangle AGK ; & les Lignes qu'on tirera par le Point G pour faire ces trois Soustractions, diviseront le Polygone en quatre parties égales.

Pour donner un exemple de ces Soustractions, on va retrancher du Polygone $ABCDEF$ une partie égale au Triangle AGK qui contient les trois quarts du Triangle AGM dans lequel le Polygone a été réduit.

Par le Point donné G ayant mené les Droites GB , GC , GD , aux Angles B , C , D , du Polygone, par le Point K placé à l'extrémité du troisième quart de la base AM du Triangle AGM , on mènera parallèlement à GB une Droite KL qui rencontrera le prolongement du côté BC en L ; par le Point L on mènera parallèlement à GC une Droite LN qui rencontrera le prolongement du côté suivant en N ; par le Point N on mènera parallèlement à GD une Droite NO qui rencontrera le côté DE en O ; enfin par le Point O & par le Point donné G on tirera la Droite OG , qui séparera du Polygone proposé une partie $GABCD O$ égale au Triangle AGK , qui vaut les trois quarts du Triangle AGM , ou du Polygone proposé.

Pour le démontrer, soient tirées les deux Droites GN , GL .

1°. Les Triangles GDO , GDN , auront même base GD & seront comptis entre mêmes Parallèles

GD , NO , & seront par conséquent égaux (N^o. 137.): Ainsi en leur ajoutant le Triangle GCD , on aura $GCD O = GCN$.

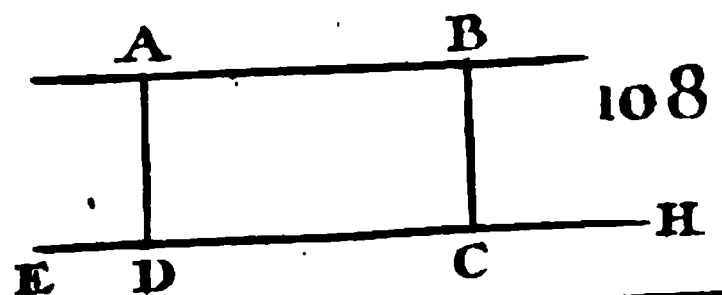
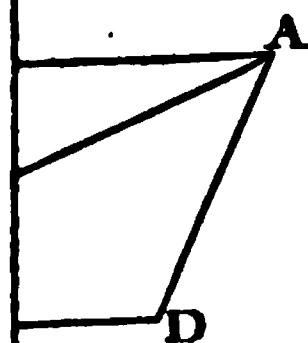
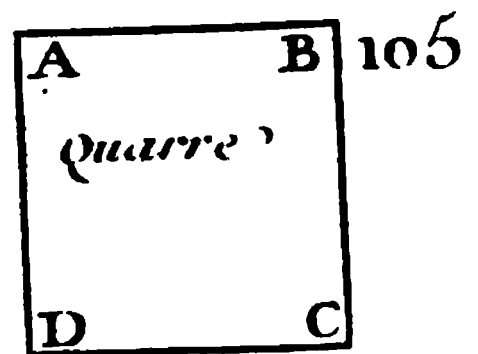
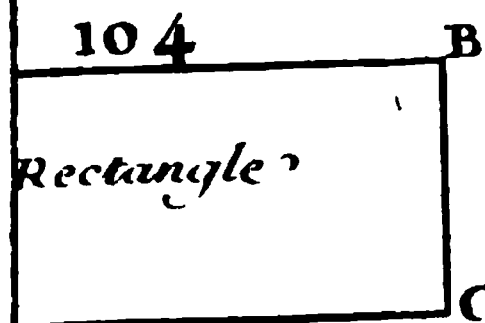
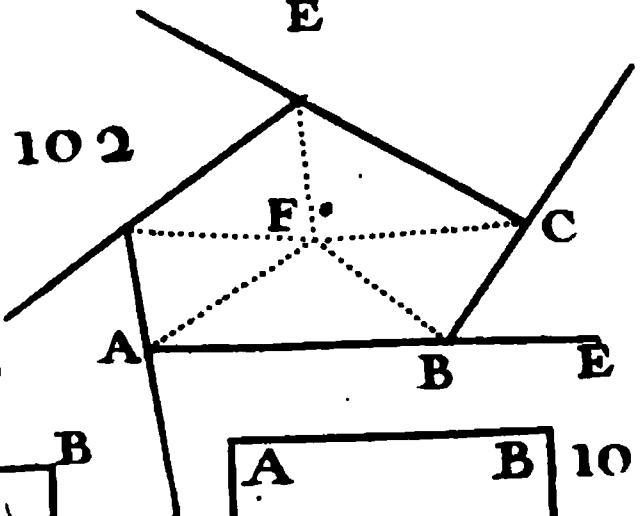
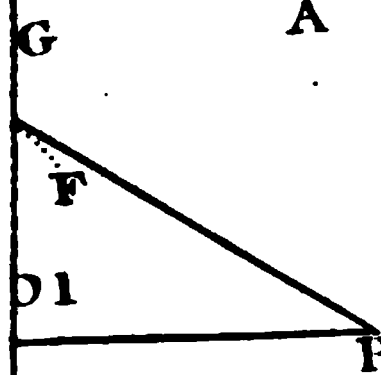
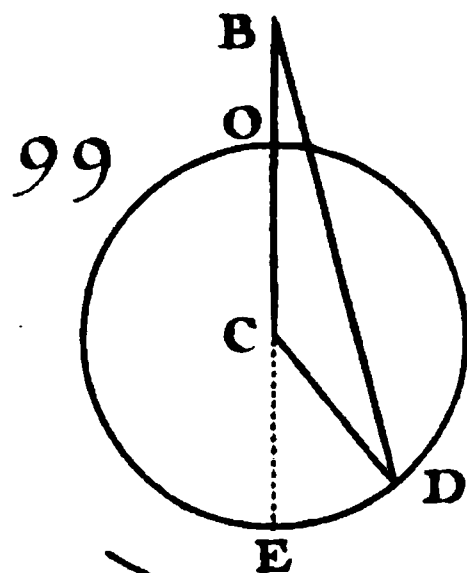
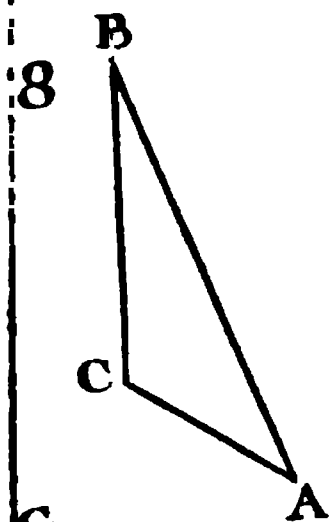
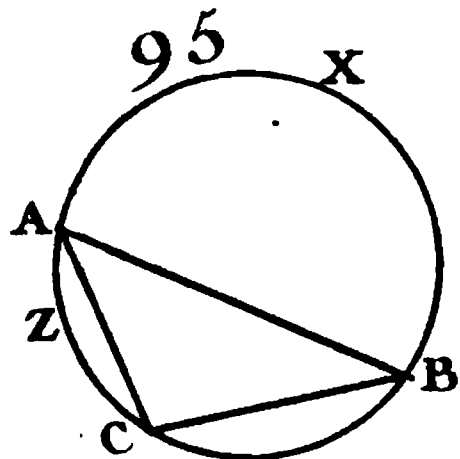
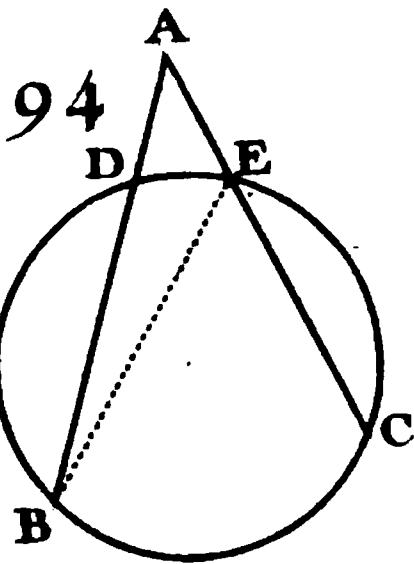
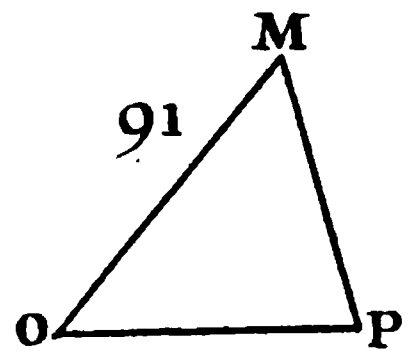
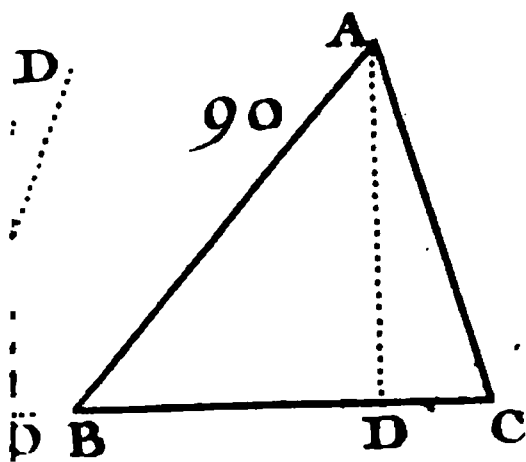
2^o. Les Triangles GCN , GCL , qui auront même base GC & qui seront compris entre les mêmes Parallèles GC , LN , seront égaux; & comme $GCD O = GCN$, on aura aussi $GCD O = GCL$. Ainsi en ajoutant le Triangle GBC , l'on aura $GBCDO = GBL$.

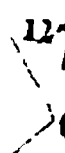
3^o. Les Triangles GBL , GBK , ayant même base GB & étant compris entre les mêmes Parallèles GB , KL , seront égaux; & comme $GBCDO = GBL$, on aura aussi $GBCDO = GBK$. Ainsi en ajoutant le Triangle GAB , l'on aura $GABCD O = GAK$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

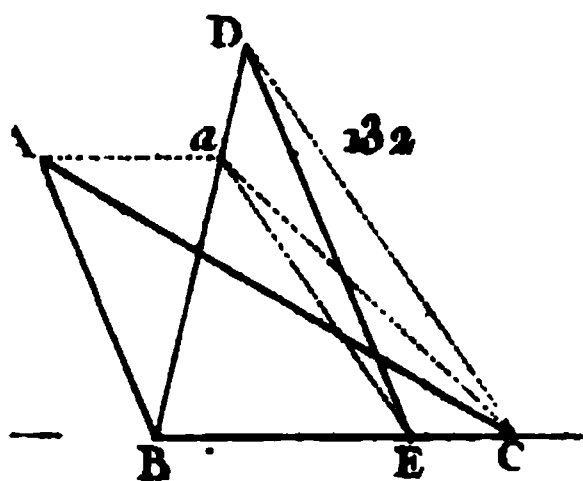
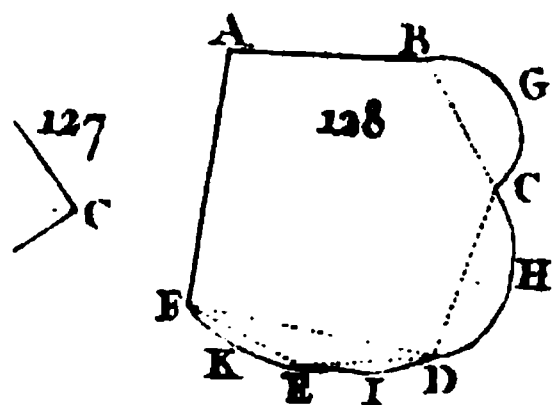
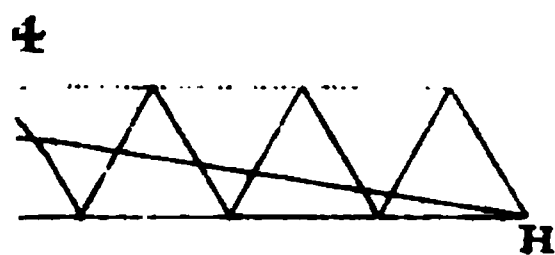
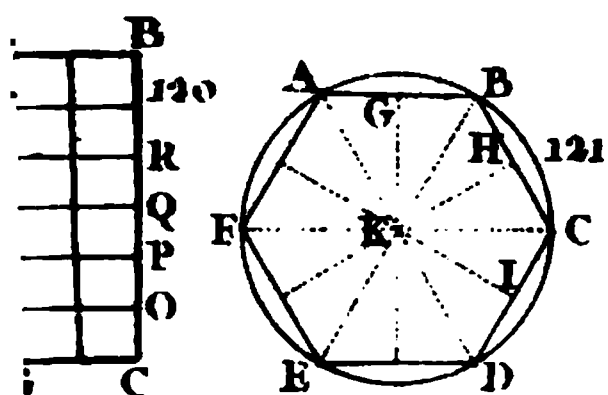
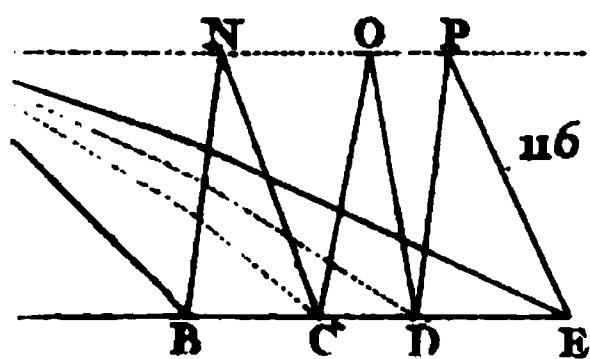
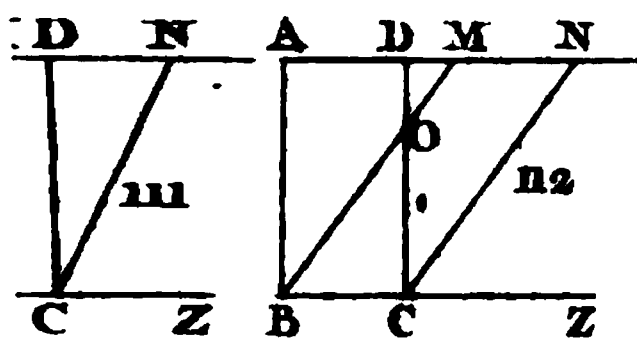
On doit remarquer que les Droites KL , LN , NO , qui soutiennent les Angles extérieurs CBK , DCL , EDN , du Polygone proposé $ABCDEF$, sont parallèles aux Droites GB , GC , GD , tirées du Point donné G aux sommets B , C , D , de ces Angles extérieurs; & qu'on doit tirer autant de ces Parallèles; qu'il en faut pour que la dernière NO rencontre un côté du Polygone, & détermine sur ce côté le Point O par lequel doit passer la Ligne de division GO .

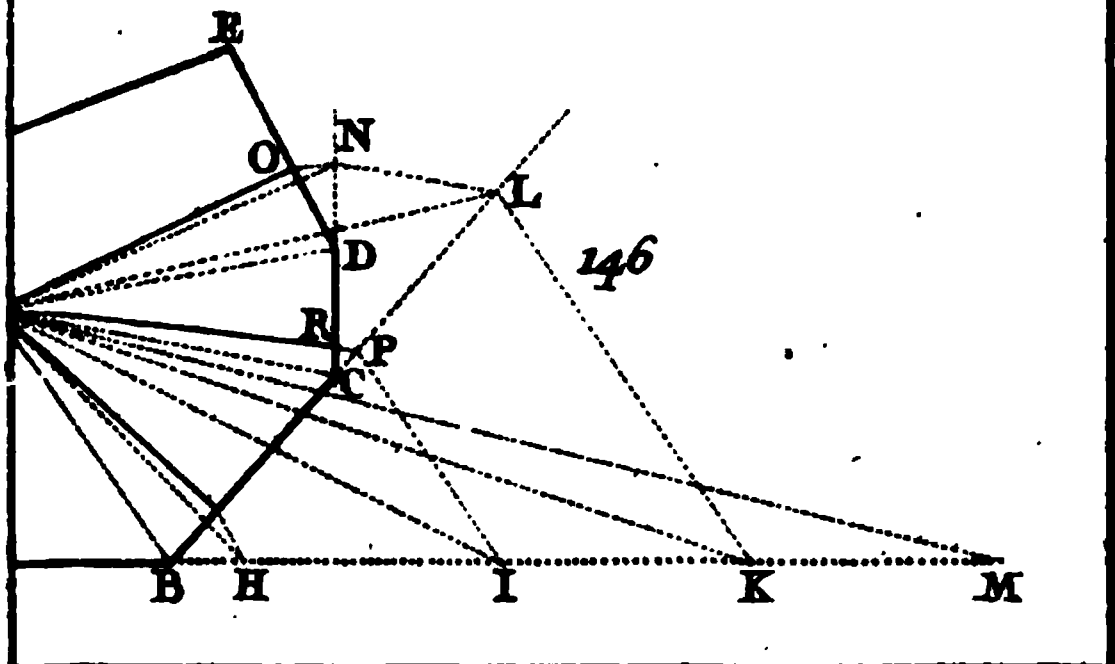
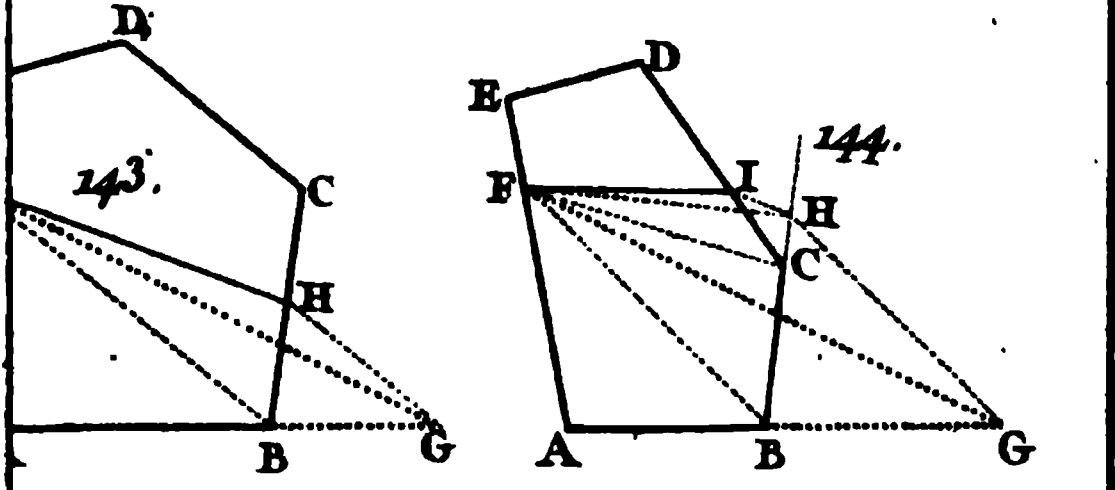
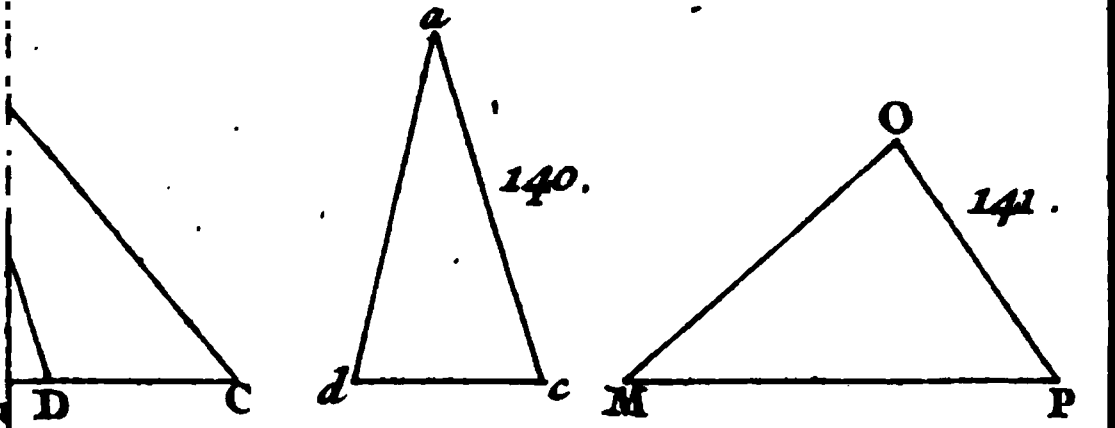
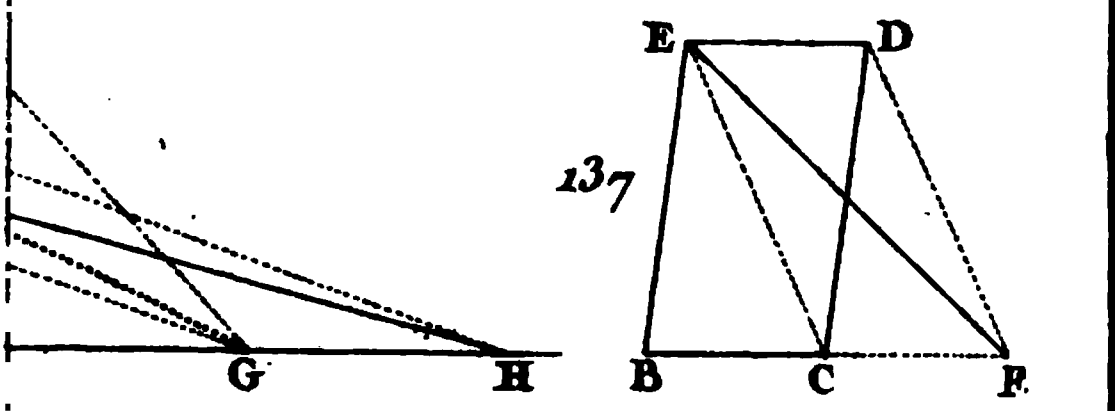
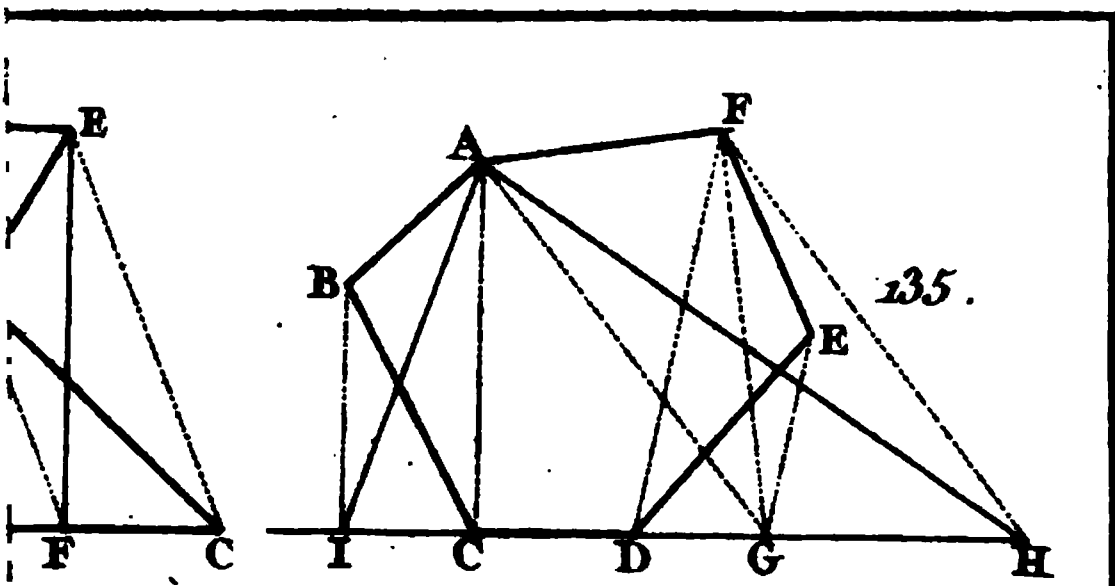
On démontrera de la même manière, que si dans l'Angle extérieur CBM on tire IP parallèle à GB , que dans l'Angle extérieur DCL on mene PR parallèle à GC , & que par le Point donné G l'on tire GR au Point R où le côté du Polygone est rencontré, cette Droite GR retranchera du Polygone $ABCDEF$ une partie $GABCR$ égale au Triangle GAI qui vaut la moitié du Triangle AGM dans lequel le Polygone $ABCDEF$ a été transformé,











2

2

2

2

2

2

2

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE THÉORIQUE ET PRATIQUE.



LIVRE III.

Des Rapports & des Proportions en général.

DÉFINITIONS.

175

À Comparaison de deux Grands
eurs s'appelle *Rapport* ou *Raison*.
On peut faire la comparaison
de deux Grandeurs en deux ma-
nieres ; avoir , en considérant la

quantité dont l'une surpasse l'autre , ou bien en con-
sidérant combien de fois l'une contient l'autre ou
est contenue en elle.

176 En comparant deux Grandeurs comme 8 & 2,
celle qu'on nomme ou qu'on écrit la première s'ap-
pelle *Antécédent* , & l'autre se nomme *Conséquent*.

177 Lorsque l'on considère la quantité dont l'An-
técédent surpasse le Conséquent , cette quantité qui
est la différence des deux Grandeurs comparées , s'ap-

pelle *Rapport arithmétique*. Ainsi pour avoir le Rapport arithmétique de deux Grandeurs telles que 8 & 2, il faut retrancher la plus petite de la plus grande; & le reste 6 est le Rapport arithmétique des deux Grandeurs.

178 Lorsque l'on considère combien de fois l'Antécédent contient le Conséquent, ou combien de fois l'Antécédent est contenu dans le Conséquent, la quantité de fois que l'un contient l'autre s'appelle *Rapport géométrique*. On peut donc avoir le Rapport géométrique de deux Grandeurs comme 8 & 2, en divisant l'une par l'autre; car le Quotient 4 de la Division exprimant combien de fois l'une de ces Grandeurs est contenue dans l'autre, sera le Rapport géométrique de ces deux Grandeurs.

Comme le Rapport géométrique est le seul donc nous ayons besoin dans ce Traité, lorsqu'on nous nous servira du terme de *Raison* ou de *Rapport*, nous entendrons toujours la Raison géométrique.

179 Pour avoir le Rapport de deux Grandeurs comme 8 & 8, ou comme 8 & 2, ou comme 2 & 8, on est convenu de diviser l'Antécédent par le Conséquent.

1°. Si l'Antécédent est égal au Conséquent, comme dans le Rapport de 8 à 8, leur Rapport $\frac{8}{8}$ se nomme *Rapport d'Égalité*. Ainsi le Rapport d'égalité est toujours l'unité.

2°. Si l'Antécédent est plus grand que le Conséquent, comme dans le Rapport de 8 à 2, leur Rapport $\frac{8}{2}$ se nomme *Rapport de grande Inégalité*. Ainsi le Rapport de grande inégalité est un nombre plus grand que l'unité.

3°. Lorsque l'Antécédent est plus petit que le Conséquent, comme dans le Rapport de 2 à 8, leur Rap-

port $\frac{2}{3}$ se nomme *Rapport de petite Inégalité*. Ainsi le Rapport de petite inégalité est un nombre moindre que l'unité.

Nous n'aurons pas besoin des termes expliqués dans cette définition. On n'en a fait mention que pour l'intelligence des Auteurs qui en font usage.

180 Lorsqu'on a deux ou plusieurs Rapports, si l'on multiplie les Antécédens ensemble, & qu'on multiplie de même les Conséquens, les deux Grands qui résultent de ces Multiplications ont entr'elles un Rapport que l'on nomme *Rapport composé* de ceux dont on a multiplié les termes. Par exemple, si l'on a trois Rapports, comme ceux de 2 à 1, 3 à 7, 4 à 5, en multipliant ensemble les Antécédens 2, 3, 4, & multipliant aussi ensemble les Conséquens 1, 7, 5, on aura deux produits 24 & 35. Or le Rapport des deux nombres 24 & 35 s'appelle Rapport composé du Rapport de 2 à 1, de celui de 3 à 7, & de celui de 4 à 5. Par la même raison le Rapport de 6 à 7 est composé du Rapport de 2 à 1 & de celui de 3 à 7. Le Rapport de 12 à 35 est composé du Rapport de 3 à 7 & du Rapport de 4 à 5, ou du Rapport de 3 à 5 & du Rapport de 4 à 7. Le même Rapport de 12 à 35 est encore composé des deux Rapports de 12 à 7 & 1 à 5, ou des deux Rapports de 2 à 7 & 6 à 5, ou des trois Rapports de 2 à 1, 2 à 7, 3 à 5. Il y a beaucoup de Traités où ces façons de parler sont fort en usage : nous ne nous en servons que rarement.

181 Deux ou plusieurs Rapports ayant les mêmes Antécédens & les mêmes Conséquens, si l'on multiplie ensemble les Antécédens, & qu'on multiplie aussi ensemble les Conséquens, les deux termes que produiront ces Multiplications auront

entr'eux un Rapport qui comparé à un des Rapports multipliés s'appelle *Rapport doublé*, si l'on a multiplié deux Rapports égaux ; ou *Rapport triplé*, si l'on a multiplié trois Rapports égaux ; ou *Rapport quadruplé*, si l'on a multiplié quatre Rapports égaux. Par exemple, le Rapport de 4 à 1 est doublé de celui de 2 à 1 ; parce qu'il est composé des deux Rapports de 2 à 1 & 2 à 1. Le Rapport de 9 à 4 est doublé de celui de 3 à 2, par la même raison.

Le rapport de 27 à 8 est triplé du rapport de 3 à 2 ; parce qu'il est composé de la Multiplication des termes des trois Rapports de 3 à 2, de 3 à 2, de 3 à 2 : & ainsi des autres.

182 Pour que deux Rapports soient égaux, il n'est pas nécessaire qu'ils aient des Antécédens égaux & des Conséquens égaux ; il suffit que les Antécédens contiennent également leurs Conséquens : car ce qu'on appelle proprement Rapport (N^o. 178.) est la quantité de fois que l'Antécédent contient le Conséquent, ou le Quotient de la Division de l'Antécédent par le Conséquent. Ainsi le Rapport de 8 à 2 est égal à celui de 12 à 3.

183 Lorsque l'on compare ensemble deux Rapports égaux, leur comparaison se nomme *Proportion géométrique* ou simplement *Proportion*, si les Rapports égaux sont géométriques ; mais la comparaison se nomme *Proportion arithmétique*, si les Rapports égaux sont des Rapports arithmétiques, c'est-à-dire, si les Antécédens surpassent également leurs Conséquens, ou s'ils en sont également surpassés. Nous ne parlerons plus de cette dernière Proportion.

Les quatre termes des deux Rapports égaux que l'on compare pour faire une Proportion, peuvent être écrits de deux manières différentes dont on va don-

der des exemples dans la comparaison du Rapport de 8 à 2 avec celui de 12 à 3 qui lui est égal. Premièrement on peut écrire les deux Rapports de suite en cette manière $8 : 2 :: 12 : 3$, en mettant quatre points entre les deux Rapports égaux & deux points entre les deux termes de chaque Rapport.

Secondement on peut encore écrire les deux Rapport égaux de cette façon $\frac{8}{2} = \frac{12}{3}$; & cette manière de les écrire peut passer pour la plus naturelle. Car puisque le Rapport de 8 à 2 n'est autre chose que $\frac{8}{2}$, que le Rapport de 12 à 3 est $\frac{12}{3}$ (N^o. 178.), & que d'ailleurs ces deux Rapports sont égaux, il est très-naturel de les écrire ainsi $\frac{8}{2} = \frac{12}{3}$.

184 Dans une Proportion géométrique quelconque représentée par $A : B :: C : D$, ou par $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, le premier terme A du premier Rapport s'appelle *premier Antécédent*; le second terme B du premier Rapport s'appelle *premier Conséquent*; le premier terme C du second Rapport se nomme *second Antécédent*; & le second terme D du second Rapport se nomme *second Conséquent*.

Le premier terme A & le dernier D de la Proportion s'appellent *Extrêmes*; le second terme B & le troisième C s'appellent *Moyens*.

185 Pour énoncer une Proportion représentée par $A : B :: C : D$, ou par $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, on dit : A est à B comme C est à D ; on peut dire aussi : A contient B autant de fois que C contient D ; ou bien, A est contenu dans B comme C est contenu dans D .

186 Lorsqu'on a plus de deux Rapports égaux, par exemple, le Rapport de 12 à 3, celui de 8 à 2, celui de 20 à 5, celui de 28 à 7, &c, on les nomme des *Rapports ordonnés*, s'ils sont disposés de la même façon, c'est-à-dire, si tous les Antécé-

dens contiennent également leurs Conséquens, ou sont également contenus dans leurs Conséquens; & on peut les écrire de trois manieres différentes.

1^o. On peut écrire tous les Rapports égaux de suite sous la forme de Fractions ou de Divisions à faire, en séparant ces Rapports les uns des autres par le Signe d'Égalité, comme il suit $\frac{12}{3} = \frac{8}{2} = \frac{20}{5} = \frac{28}{7}$ &c; ce qui fournit autant d'Égalités particulières qu'il y a de façons de prendre deux à deux les Rapports égaux. Ainsi pour les quatre Rapports égaux qui servent d'exemple, on aura ces six Égalités ou Proportions.

$$\begin{array}{ccc} \frac{12}{3} = \frac{8}{2} & \frac{12}{3} = \frac{28}{7} & \frac{8}{2} = \frac{28}{7} \\ \frac{12}{3} = \frac{20}{5} & \frac{8}{2} = \frac{20}{5} & \frac{20}{5} = \frac{28}{7} \end{array}$$

2^o. On pourra écrire tous les termes des Rapports égaux de suite, en séparant les deux termes de chaque Rapport par deux points, & en séparant les Rapports les uns des autres par quatre points, comme il suit $12 : 3 :: 8 : 2 :: 20 : 5 :: 28 : 7$ &c; ce qui donnera autant de Proportions particulières qu'il y aura de façons de prendre deux à deux les Rapports égaux. Ainsi les quatre Rapports égaux qu'on a pris pour exemples donneront ces six Proportions.

$$\begin{array}{cc} 12 : 3 :: 8 : 2 & 8 : 2 :: 20 : 5 \\ 12 : 3 :: 20 : 5 & 8 : 2 :: 28 : 7 \\ 12 : 3 :: 28 : 7 & 20 : 5 :: 28 : 7 \end{array}$$

3^o. On pourra écrire tous les Antécédens de suite, en les séparant les uns des autres par deux points; écrire aussi tous les Conséquens de suite, en les séparant pareillement par deux points; & séparer par quatre points la Suite des Antécédens de la Suite des

Conséquens, en observant que l'Antécédent & le Conséquent de chaque Rapport tiennent le même lieu dans les deux Suites. Ainsi les mêmes Rapports dont nous venons de parler pourront s'écrire comme il suit $12 : 8 : 20 : 28 :: 3 : 2 : 5 : 7$; ce qui signifiera en général que les termes qui composent la première Suite sont proportionnels aux termes correspondans qui composent la seconde Suite.

Cette façon d'écrire les Rapports égaux est souvent très-commode, principalement lorsque les parties d'une même Figure servent d'antécédens à des Rapports égaux, & que les parties d'une autre Figure servent de Conséquens aux mêmes Rapports égaux : parce qu'alors toutes les parties de la première Figure pouvant être écrites de suite, & les parties correspondantes de la seconde Figure tant pareillement écrites de suite, on distingue aisément ce qui appartient à une Figure de ce qui appartient à l'autre ; & l'on voit clairement quelles sont ces parties correspondantes que l'on peut comparer dans ces deux Figures, & dont on peut former des proportions.

Par exemple, si deux Figures *ABCDE*, *MNOPQ*, Fig. 147
& 148. ont leurs côtés proportionnels, c'est-à-dire, 1

$$AB : MN :: BC : NO$$

$$BC : NO :: CD : OP$$

$$CD : OP :: DE : PQ \&c.$$

on écrira de suite les côtés *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, &c de la première Figure, qui servent d'Antécédens aux Rapports égaux, & l'on écrira pareillement de suite les côtés *MN*, *NO*, *OP*, *PQ*, &c. de la seconde Figure, qui servent de Conséquens aux mêmes Rapports égaux, en observant que les côtés correspon-

dans tiennent le même lieu dans les deux Suites : & l'on aura $AB : BC : CD : DE : \&c :: MN : NO : OP : PQ : \&c$. Comme il est important de faire attention à cette manière d'écrire les Rapports égaux, & aux différentes Proportions qu'on en peut tirer, nous ferons encore remarquer que les deux Suites de proportionnelles $AB : BC : CD : DE :: MN : NO : OP : PQ$, composées chacune de quatre termes, fournissent les six Proportions suivantes :

$$\begin{array}{ll} AB : MN :: BC : NO & BC : NO :: CD : OP \\ AB : MN :: CD : OP & BC : NO :: DE : PQ \\ AB : MN :: DE : PQ & CD : OP :: DE : PQ \end{array}$$

Fig. 149 & 150. 187 Lorsque deux Figures X & Z sont telles que le côté AB de la première est au côté MN de la seconde, comme le côté BC de la première est au côté NO de la seconde, on dit que ces deux Figures X & Z ont deux côtés *directement proportionnels*, ou simplement *proportionnels* ; & si tous les côtés de la première ont même Rapport avec tous les côtés de la seconde, on dit que ces deux Figures ont tous les côtés proportionnels.

Dnc lorsque deux Figures X & Z ont deux côtés proportionnels, par exemple, si $AB : MN :: BC : NO$, ou qu'elles ont tous les côtés en même Rapport, savoir, $AB : MN :: BC : NO :: CD : OP :: EA : PM$, les côtés de la première X sont les Antécédens d'une Suite de Rapports égaux ordonnés ; & les côtés de la seconde Z sont les Conséquens des mêmes Rapports.

Fig. 151 & 152. 188 Si deux Figures X & Z sont telles qu'un côté AB de la première soit au côté MN de la seconde, comme un côté NO de la seconde est à un côté BC

BC de la première, on dit que les Figures *X* & *Z* ont deux côtés *reciproquement proportionnels* ou *reciproques*.

Ainsi lorsque deux Figures *X* & *Z* ont deux côtés reciproques, c'est-à-dire, lorsque $AB:MN::NO:BC$, les côtés *AB*, *BC*, de la première, sont les Extrêmes de la Proportion, & les côtés *MN*, *NO*, de la seconde, sont les Moyens de la même Proportion.

189 Lorsque trois Grandeurs, comme 2, 10, 50, sont telles que la première est à la seconde comme la seconde à la troisième, la Proportion que l'on fait avec ces trois Grandeurs s'appelle *Proportion continue*; & au lieu d'écrire $2:10::10:50$, on écrit $\ddot{::} 2:10:50$.

Si l'on a plus de trois Grandeurs telles que la première soit à la seconde comme la seconde à la troisième, comme la troisième à la quatrième, &c. c'est-à-dire, si chaque terme contient également le terme qui le suit, ou est également contenu dans celui qui le suit, toutes ces Grandeurs font une *Progression géométrique* qu'on appelle simplement *Progression*. Ainsi 16, 8, 4, 2, 1, &c ou 1, 2, 4, 8, 16, &c font une Progression géométrique que l'on écrit ainsi $\ddot{::} 16:8:4:2:1:\&c$ ou $\ddot{::} 1:2:4:8:16:\&c$; la première est une Progression décroissante, & l'autre est une Progression croissante.

COROLLAIRE.

190 Donc si l'on compare une même Grandeur à deux Grandeurs égales, ou deux Grandeurs égales à une même Grandeur ou à des Grandeurs égales, les deux Rapports seront égaux. Car les Grandeurs égales contiendront également la même Grandeur ou les Grandeurs égales avec lesquelles on les comparera, ou bien seront également contenues en elles.

Et réciproquement deux Grandeurs seront égales, quand en les comparant à une même Grandeur ou à des Grandeurs égales, elles feront des Rapports égaux, c'est-à-dire, une Proportion géométrique. Par exemple, les deux quantités A & B seront égales, si $A:C::B:C$.

AXIOMES.

191 I. Si deux Grandeurs A & B sont multipliées par une même Grandeur, les produits qui résulteront de la multiplication seront dans le même rapport que les Grandeurs A & B qu'on a multipliées. Par exemple, $A:B::2A:2B::3A:3B::4A:4B$ &c. c'est-à-dire, que $\frac{A}{B} = \frac{2A}{2B} = \frac{3A}{3B} = \frac{4A}{4B}$ &c.

192 II. Et par conséquent, si deux Grandeurs A & B sont divisées par une même quantité, les quotiens seront dans le même Rapport que les Grandeurs A & B ; c'est-à-dire, qu'on aura

$$A:B::\frac{1}{2}A:\frac{1}{2}B::\frac{1}{3}A:\frac{1}{3}B \text{ \&c. ou } \frac{A}{B} = \frac{\frac{1}{2}A}{\frac{1}{2}B} = \frac{\frac{1}{3}A}{\frac{1}{3}B} \text{ \&c.}$$

THÉORÈME.

Fig. 153. 193 Si deux Parallélogrammes AC , DE , sont compris entre les mêmes Parallèles AF , BE , ils sont dans le même rapport que les portions BC , CE , de la Parallèle qui leur sert de base; c'est-à-dire, que $AC:DE::BC:CE$.

DÉMONSTRATION.

Puisque les Parallélogrammes AC , DE , sont compris entre les mêmes Parallèles, ils ont la même hauteur exprimée par la distance AM des deux Parallèles entre lesquelles ils sont compris.

Donc (N^o. 142.) le Parallélogramme $AC = BC \times AM$ & le Parallélogramme $DE = CE \times AM$.

Mais $BC \times AM : CE \times AM :: BC : CE$
(N°. 191.).

Donc $AC : DE :: BC : CE$. Ce qu'il falloit démontrer.

Ce Théorème est évident par lui-même. Car les deux Parallélogrammes étant compris entre les mêmes Parallèles, il est clair qu'on trouvera dans AC autant de Parallélogrammes égaux à DE , qu'on trouvera dans BC de parties égales à CE ; & par conséquent AC contient DE autant de fois que BC contient CE , c'est-à-dire, que $AC : DE :: BC : CE$.

COROLLAIRE.

194 Donc les Triangles BAC , CAE , qui ont Fig. 154
leurs bases BC , CE , en Ligne droite, & leur Sommet au même Point, c'est-à-dire, qui ont même hauteur, sont entr'eux dans le même rapport que leurs bases BC , CE . Car ces Triangles étant les moitiés des Parallélogrammes $ABCD$, $DCEF$, qui ont même hauteur, sont entr'eux comme ces Parallélogrammes. Mais ces Parallélogrammes sont entr'eux comme leurs bases BC , CE . Donc on aura aussi $BAC : CAE :: BC : CE$.

THÉORÈME.

195 Deux Parallélogrammes ou deux Triangles X & Z Fig. 155;
156 & 157.
sont égaux, quand ils ont un Angle égal entre deux côtés réciproques.

Il faut démontrer que $X=Z$ si l'Angle $ABE=DBC$, & si $AB : BC :: DB : BE$.

DÉMONSTRATION.

. Puisque l'Angle $ABE=DBC$, on pourra les opposer par leur Sommet, & par conséquent faire en sorte que les côtés AB , BC , que l'on compare en-

semble, soient en Ligne droite; & que les côtés DB , BE , que l'on compare ensemble, soient aussi en Ligne droite. Cela posé, l'on aura

$$1^{\circ}. X:Y::AB:BC \text{ (N}^{\circ}. 193 \text{ ou } 194.).$$

$$2^{\circ}. AB:BC::DB:BE \text{ (hyp.).}$$

$$3^{\circ}. \text{(N}^{\circ}. 193 \text{ ou } 194.) DB:BE::Z:Y.$$

Donc $X:Y::Z:Y$; & par conséquent $X=Z$, puisqu'ils contiennent également Y ou qu'ils sont également contenus en Y . Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Fig. 157. 196 Donc dans une Proportion géométrique, telle que $AB:BC::DB:BE$, le produit $AB \times BE$ des Extrêmes est égal au produit $BC \times DB$ des Moyens. Car si l'on fait un Rectangle X qui ait les deux Extrêmes AB , BE , pour côtés contigus, & un autre Rectangle Z qui ait les Moyens BC , DB , pour côtés contigus, ces deux Figures auront un Angle égal compris entre des côtés réciproques; & par conséquent on aura $X=Z$ (N^o. 195.).

Mais (N^o. 143.) le Rectangle $X=AB \times BE$ produit des Extrêmes, & le Rectangle $Z=DB \times BC$ produit des Moyens. Donc dans une Proportion géométrique, le produit des Extrêmes est égal au produit des Moyens.

COROLLAIRE II.

197 Puisque la Proportion $AB:BC::DB:BE$ donne $AB \times BE = BC \times DB$;

1^o. En divisant chaque membre par AB , on aura $BE = \frac{BC \times DB}{AB}$; d'où l'on voit que si l'on connoît les trois premiers termes AB , BC , DB , d'une Proportion, on aura le quatrième BE en multipliant les deux Moyens BC , DB , l'un par l'autre, & en divisant le produit par le premier Extrême AB .

2°. En divisant chaque membre par BE , on aura $AB = \frac{BC \times DB}{BE}$; c'est-à-dire, que si l'on connoît les trois derniers termes BC , DB , BE , d'une Proportion, l'on aura le premier AB en multipliant les deux Moyens BC , DB , l'un par l'autre, & en divisant le produit par le dernier Extrême BE .

3°. En divisant chaque membre par BC , on aura $DB = \frac{AB \times BE}{BC}$; c'est-à-dire, que si l'on connoît les Extrêmes & le premier Moyen d'une Proportion, l'on aura le second Moyen en multipliant les deux Extrêmes l'un par l'autre, & en divisant le produit par le premier Moyen.

4°. En divisant chaque membre par DB , on aura $BC = \frac{AB \times BE}{DB}$; c'est-à-dire, que si l'on connoît les Extrêmes & le second Moyen d'une Proportion, l'on aura le premier Moyen en multipliant les deux Extrêmes l'un par l'autre, & en divisant le produit par le second Moyen.

Avertissement.

Lorsque quatre termes AB , BC , DB , BE , sont tels que le premier AB est plus grand par rapport au second BC , que le troisième DB par rapport au quatrième BE ; c'est-à-dire, lorsque le premier terme est trop grand pour que les quatre termes soient en Proportion géométrique, on les écrit ainsi $AB : BC > DB : BE$, ou $\frac{AB}{BC} > \frac{DB}{BE}$: ce qui signifie que le Rapport de AB à BC est plus grand que le Rapport de DB à BE .

Si au contraire le premier terme AB est trop petit pour que les quatre termes AB , BC , DB , BE , soient en Proportion géométrique, on les écrit ainsi $AB : BC < DB : BE$, ou $\frac{AB}{BC} < \frac{DB}{BE}$: ce qui signifie que le Rapport de AB à BC est plus petit que le Rapport de DB à BE .

COROLLAIRE III.

Fig. 158. 198 Si la Raison de AB à BC est plus grande que la Raison de DB à BE , c'est-à-dire, si $AB : BC > DB : BE$, le Parallélogramme AE qui aura pour côtés contigus les Extrêmes, sera plus grand que le Parallélogramme équiangle DC qui aura pour côtés contigus les Moyens : & par conséquent le Rectangle AE égal au produit $AB \times BE$ des Extrêmes, sera plus grand que le Rectangle DC égal au produit $BC \times DB$ des Moyens.

Car si du premier terme AB l'on retranche une partie AI , telle que le reste IB soit en proportion avec les trois autres termes, de maniere que l'on ait $IB : BC :: DB : BE$, & que l'on mene IF parallèle à DBE , l'on aura (N^o. 195.) $IE = DC$. Mais puisque (hyp.) $AB > IB$, l'on aura aussi $AE > IE$; & par conséquent $AE > DC$.

On peut encore démontrer le même Corollaire comme il suit.

$$AE : BH :: AB : BC \text{ (N^o. 193.)}$$

$$AB : BC > DB : BE \text{ (hyp.)}$$

$$\text{Et (N^o. 193.) } DB : BE :: DC : BH.$$

Donc $AE : BH > DC : BH$; & par conséquent $AE > DC$.

COROLLAIRE IV.

Fig. 159. 199 Au contraire, si la Raison de AB à BC est moindre que celle de DB à BE , c'est-à-dire, si $AB : BC < DB : BE$, le Parallélogramme AE qui aura pour côtés contigus les Extrêmes, sera moindre que le Parallélogramme équiangle DC qui aura pour côtés contigus les Moyens; & par conséquent le Rectangle AE égal au produit $AB \times BE$ des Extrêmes, sera moindre que le Rectangle DC égal au produit $BC \times DB$ des Moyens.

Car si AB , qu'on suppose trop petit, est allongé d'une quantité AL , telle que l'on ait $LB:BC::DB:BE$, & qu'on mene LM parallèle à BE , l'on aura (N^o. 195.) $LE=DC$. Mais $AE < LE$. Donc aussi $AE < DC$.

THÉORÈME.

200 Lorsque deux Parallélogrammes ou deux Triangles X, Z , sont égaux, & qu'ils ont un Angle égal, ils ont toujours leurs côtés réciproques autour de l'Angle égal. C'est-à-dire, que si $X=Z$, & si l'Angle $ABE=DBC$, on aura $AB:BC::DB:BE$. Fig. 155, 156 & 157.

DÉMONSTRATION.

Puisque les Angles ABE, DBC , sont égaux, on pourra les opposer par leur Sommet; & les côtés AB, DB , seront en Ligne droite avec les côtés BC, BE . Cela posé, on aura

1^o. $AB:BC::X:Y$ (N^o. 193 ou 194.).

2^o. (N^o. 190.) $X:Y::Z:Y$, puisque $X=Z$.

3^o. (N^o. 193 ou 194.) $Z:Y::DB:BE$.

Donc $AB:BC::DB:BE$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

201 Nous avons vu (N^o. 196.) que dans une Proportion géométrique $AB:BC::DB:BE$, le produit $AB \times BE$ des Extrêmes est égal au produit $BC \times DB$ des Moyens. On va maintenant conclure du Théorème précédent que quatre termes AB, BC, DB, BE , seront en Proportion, si $AB \times BE$ produit des Extrêmes est égal à $DB \times BC$ produit des Moyens. Fig. 157.

Pour le démontrer, soit fait un Rectangle X qui ait les Extrêmes AB, BE , pour côtés contigus; soit

136 Liv. III. DES RAPPORTS &c.
 aussi fait un Rectangle Z qui ait les Moyens DB ;
 BC , pour côtés contigus : on aura (N^o . 143.)
 $1^o. X = AB \times BE$; $2^o. Z = DB \times BC$.

Et puisqu'on suppose $AB \times BE = DB \times BC$,
 on aura $X = Z$.

Mais les deux Rectangles égaux X & Z ayant les
 Angles égaux, ont les côtés réciproques (N^o . 200.).
 Donc $AB : BC :: DB : BE$.

COROLLAIRE II.

Fig. 158. 202 Si les quatre termes AB , BC , DB , BE ,
 sont tels que le Parallélogramme AE qui a pour cô-
 tés contigus les Extrêmes, soit plus grand que le
 Parallélogramme équiangle DC qui a pour côtés
 contigus les Moyens, ou que le produit $AB \times BE$
 des Extrêmes soit plus grand que le produit $BC \times DB$
 des Moyens, le Rapport de AB à BC fera plus
 grand que le Rapport de DB à BE ; c'est-à-dire, que
 l'on aura $AB : BC > DB : BE$.

Car si $AE > DC$, soit menée parallèlement à
 BE une Droite IF qui retranche de AE une par-
 tie AF dont AE est plus grand que DC ; l'on
 aura $IE = DC$: & par conséquent (N^o . 200.)
 $IB : BC :: DB : BE$. Donc puisque $AB > IB$, on
 aura $AB : BC > DB : BE$.

On peut encore démontrer ce Corollaire comme
 il suit.

$$AB : BC :: AE : BH \text{ (N}^o \text{. 193.)}$$

$AE : BH > DC : BH$, parce qu'on
 suppose $AE > DC$,

Et (N^o . 193.)

$$DC : BH :: DB : BE,$$

Donc $AB : BC > DB : BE$.

COROLLAIRE III.

Fig. 159. 203 Si au contraire le Parallélogramme AE qui

a. pour côtés contigus les Extrêmes, est moindre que le Parallélogramme équiangle DC qui a pour côtés contigus les Moyens, ou si le produit $AB \times BE$ des Extrêmes est moindre que le produit $BC \times DB$ des Moyens, on aura $AB : BC < DB : BE$.

Car si $AE < DC$, ajoutons à AE une quantité AM telle que LE soit un Parallélogramme égal à DC ; l'on aura (N°. 200.) $LB : BC :: DB : BE$. Donc puisque $AB < LB$, l'on aura $AB : BC < DB : BE$.

On pourroit donner de ce Corollaire une nouvelle Démonstration semblable à la seconde du Corollaire précédent.

RÈGLES DES PROPORTIONS.

CEs Règles consistent dans quelques changemens qu'on peut faire aux termes d'une Proportion, ou dans la combinaison de deux ou de plusieurs Proportions, de manière qu'il résulte toujours une Proportion.

PREMIERE REGLE.

204 Si l'on a une Proportion, par exemple : $AB : BC :: DB : BE$, on pourra la changer en celle-ci $BC : AB :: BE : DB$, ou en celle-ci $BE : DB :: BC : AB$. Ce changement se nomme **INVERTENDO**.

DÉMONSTRATION.

Cette Règle est évidente ; car si AB contient BC autant de fois que DB contient BE , il faut nécessairement que BC soit contenu dans AB autant de fois que BE est contenu dans DB .

On peut encore démontrer cette première Règle, comme il suit.

Puisque (*hyp.*) $AB : BC :: DB : BE$, on aura (N^o. 196.) $AB \times BE = DB \times BC$. Donc les quatre termes BC, AB, BE, DB , ou BE, DB, BC, AB , sont en Proportion géométrique (N^o. 201.); puisque le produit de leurs Extrêmes est égal au produit de leurs Moyens.

R E M A R Q U E.

Fig. 158. 205 1^o. On remarquera que si l'on avoit
 $AB : BC > DB : BE$,

on auroit aussi *Invertendo* $BE : DB > BC : AB$.

Car les Extrêmes & les Moyens sont les mêmes dans ces deux arrangements; & comme (N^o. 198.) le produit $AB \times BE$ des Extrêmes est plus grand que le produit $BC \times DB$ des Moyens dans le premier arrangement, le produit des Extrêmes sera aussi plus grand que le produit des Moyens dans le second arrangement. Ainsi l'on aura (N^o. 202.) $BE : DB > BC : AB$.

2^o. On doit encore remarquer que si l'on avoit $AB : BC > DB : BE$, l'on auroit au contraire *Invertendo* $BC : AB < BE : DB$.

Car les termes AB, BE , qui sont Extrêmes dans le premier arrangement, deviendroient Moyens dans le second arrangement; & ceux qui sont Moyens dans le premier arrangement deviendroient Extrêmes dans le second. Mais dans le premier arrangement le produit $AB \times BE$ des Extrêmes est plus grand que le produit $BC \times DB$ des Moyens. Donc dans le second arrangement le produit des Extrêmes seroit moindre que le produit des Moyens. Ainsi (N^o. 203.) l'on auroit $BC : AB < BE : DB$.

On démontrera de la même manière que si l'on avoit $AB : BC < DB : BE$, l'on trouveroit *INVERTENDO*
 $BE : DB < BC : AB$.
 $BC : AB > BE : DB$.

DEUXIÈME REGLE.

206 Si l'on a une Proportion géométrique, par exemple $AB:BC::DB:BE$, on pourra la changer en celle-ci $AB:DB::BC:BE$.

Ce changement s'appelle **ALTERNANDO**.

DÉMONSTRATION.

Puisque (*hyp.*) les quatre termes AB, BC, DB, BE , sont en proportion, le produit $AB \times BE$ des Extrêmes est égal au produit $DB \times BC$ des Moyens (N^o. 196.). Mais dans le changement que l'on fait, on a les mêmes Extrêmes & les mêmes Moyens que dans la Proportion supposée par l'hypothèse. Ainsi dans le nouvel arrangement AB, DB, BC, BE , le produit des Extrêmes est égal au produit des Moyens ; & par conséquent (N^o. 201.) ces quatre termes sont en Proportion géométrique. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

207 On a vû (N^o. 186.) que les deux Suites $AB:BC:CD:DE:\&c::MN:NO:OP:PQ:\&c$ qui sont séparées par quatre Points, & dont les termes sont séparés les uns des autres par deux Points, représentent des Rapports égaux dont les Antécédens composent la première Suite, & dont les Conséquens composent la seconde Suite ; en sorte qu'on peut en faire autant de Proportions particulières qu'il y a de manières de prendre deux à deux les termes de chaque Suite. Ainsi dans l'exemple proposé, où chaque Suite est composée de quatre termes, on peut faire les six Proportions suivantes,

$$\begin{array}{ll} AB:MN::BC:NO & BC:NO::CD:OP \\ AB:MN::CD:OP & BC:NO::DE:PQ \\ AB:MN::DE:PQ & CD:OP::DE:PQ \end{array}$$

Mais toutes ces Proportions étant alternées par la Règle qu'on vient d'expliquer, donneront les six Proportions suivantes.

$$\begin{array}{ll} AB:BC::MN:NO & BC:CD::NO:OP \\ AB:CD::MN:OP & BC:DE::NO:PQ \\ AB:DE::MN:PQ & CD:DE::OP:PQ \end{array}$$

Donc dans les deux Suites de proportionnelles $AB:BC:CD:DE:\&c::MN:NO:OP:PQ:\&c$, d'où l'on peut tirer autant de Proportions particulières qu'il y a de manières de prendre deux à deux les termes de chaque Suite, on pourra prendre les deux premiers termes de chaque Proportion dans la première Suite, & les deux derniers termes de chaque Proportion dans la seconde Suite; en observant de prendre pour chaque Proportion des termes correspondans dans les deux Suites, comme on le voit dans les six Proportions qu'on a trouvées en alternant.

COROLLAIRE II.

208 Si plusieurs Proportions ont les mêmes Antécédens, comme celles-ci

$$\left\{ \begin{array}{l} AB:BC::MN:NO \\ AB:CD::MN:OP \\ AB:DE::MN:PQ \&c \end{array} \right.$$

on en pourra faire ces deux Suites de proportionnelles $AB:BC:CD:DE:\&c::MN:NO:OP:PQ:\&c$, dont la première sera composée d'un premier Antécédent & de tous les premiers Conséquens, & dont la seconde sera composée d'un second Antécédent & de tous les seconds Conséquens.

Car alternant les Proportions données qui ont les mêmes Antécédens,

$$\text{on aura celles-ci} \begin{cases} AB:MN::BC:NO \\ AB:MN::CD:OP \\ AB:MN::DE:PQ \text{ \&c.} \end{cases}$$

dont tous les Rapports sont égaux à celui de AB à MN , & par conséquent égaux entr'eux.

On aura donc $AB:MN::BC:NO::CD:OP::DE:PQ::\&c$; & écrivant les Antécédens dans une Suite, & les Conséquens dans une autre Suite (N^o. 186.), on aura enfin $AB:BC:CD:DE:\&c::MN:NO:OP:PQ:\&c$.

REMARQUE.

209 On doit remarquer que si l'on avoit

$$AB:BC > DB:BE$$

Fig. 1582

on auroit aussi Alternando $AB:DB > BC:BE$.

On démontrera cette Remarque comme celle de la première Règle (N^o. 205.).

On fera voir aussi que si l'on avoit $AB:BC < DB:BE$,
l'on trouveroit Alternando $AB:DB < BC:BE$.

TROISIÈME REGLE.

210 Si l'on a une Proportion géométrique, telle que celle-ci $AB:BC::DB:BE$, on pourra la changer en celle-ci $AB+BC:BC::DB+BE:BE$.

Ce changement s'appelle COMPONENDO.

DÉMONSTRATION.

Pour démontrer que ces quatre nouveaux termes sont en proportion, il suffit (N^o. 201.) de faire voir que le produit de leurs Extrêmes est égal au produit

de leurs Moyens , c'est-à-dire , que l'on aura $AB \times BE + BC \times BE = BC \times DB + BC \times BE$: & comme ces deux produits ont une partie commune $BC \times BE$, il suffira de faire voir que les deux autres parties $AB \times BE$, $BC \times DB$, de ces produits, sont égales. Or puisque (*hyp.*) $AB : BC :: DB : BE$, on aura (N^o. 196.) $AB \times BE = DB \times BC$. Donc la Proportion supposée $AB : BC :: DB : BE$ peut être changée en celle-ci $AB + BC : BC :: DB + BE : BE$. Ce qu'il falloit démontrer.

AUTRE DÉMONSTRATION.

Fig. 157. Puisque $AB : BC :: DB : BE$ (*hyp.*) , si l'on fait un Rectangle AE qui ait pour côtés les Extrêmes AB , BE , de la Proportion , & un Rectangle DC qui ait pour côtés les Moyens BC , DB , on aura $AE = DC$ (N^o. 195.) ; & ajoutant BH à chaque membre on aura $AH = DH$. Mais

$$1^{\circ}. AC : BC :: AH : BH \text{ (N}^{\circ}. 193.).$$

$$2^{\circ}. AH : BH :: DH : BH \text{ (N}^{\circ}. 190.).$$

$$3^{\circ}. \text{ (N}^{\circ}. 193.) \quad DH : BH :: DE : BE.$$

Donc $AC : BC :: DE : BE$, c'est-à-dire ; $AB + BC : BC :: DB + BE : BE$. Ce qu'il falloit démontrer.

Lorsque deux Droites AC , DE , seront coupées proportionnellement , c'est-à-dire , lorsque la première partie AB de la première Ligne sera à sa seconde partie BC , comme la première partie DB de la seconde Ligne à sa seconde partie BE , nous nous servirons de cette troisième Règle pour conclure que la première Ligne AC est à sa seconde partie BC , comme la seconde Ligne DE est à sa seconde partie BE .

66

REMARQUE.

211 Il est à propos de remarquer que si l'on avoit $AB:BC > DB:BE$, l'on auroit aussi *Componendo* $AB+BC:BC > DB+BE:BE$.

Car dans le premier arrangement on a (N^o. 198.) $AB \times BE > BC \times DB$. Ainsi en ajoutant à chaque membre $BC \times BE$, on trouvera que $AB \times BE + BC \times BE$, qui est le produit des Extrêmes dans le second arrangement, est plus grand que $BC \times DB + BC \times BE$ qui est le produit des Moyens dans le même second arrangement. Donc (N^o. 205.) $AB+BC:BC > DB+BE:BE$.

On prouvera de la même manière que si l'on avoit $AB:BC < DB:BE$, l'on auroit aussi *Componendo*. $AB+BC:BC < DB+BE:BE$.

QUATRIÈME REGLE.

212 Si l'on a une Proportion géométrique telle que $AB:BC::DB:BE$, on pourra la changer en celle-ci $AB+BC:AB::DB+BE:DB$.

DÉMONSTRATION.

Pour démontrer que ce changement donne encore une Proportion, il suffit (N^o. 201.) de faire voir que le produit des Extrêmes est égal à celui des Moyens, c'est-à-dire, que $AB \times DB + BC \times DB = AB \times DB + AB \times BE$.

1^o. Il est évident que $AB \times DB = AB \times DB$.

2^o. Puisque (*hyp.*) $AB:BC::DB:BE$, on aura $BC \times DB = AB \times BE$ (N^o. 196.).

Donc $AB+BC:AB::DB+BE:DB$. Ce qu'il falloit démontrer.

AUTRE DÉMONSTRATION.

Fig. 155
& 157.

Puisque (*hyp.*) $AB:BC::DB:BE$, on aura $AE=DC$ (N^o. 195.). Ajoutant BH à chaque membre, on aura $AH=DH$; & en comparant ces deux Égalités, on aura $AH:AE::DH:DC$. Mais

1^o. $AC:AB::AH:AE$ (N^o. 193.).

2^o. On a vû que $AH:AE::DH:DC$.

3^o. (N^o. 193.)

$DH:DC::DE:DB$.

Donc $AC:AB::DE:DB$, c'est-à-dire, que $AB+EC:AB::DB+BE:DB$. Ce qu'il falloit démontrer.

Lorsque deux Lignes AC, DE, seront coupées en parties proportionnelles, c'est-à-dire, de maniere que la premiere partie AB de la premiere Ligne soit à sa seconde partie BC, comme la premiere partie DB de la seconde Ligne est à sa seconde partie BE, nous nous servirons souvent de cette quatrième Règle pour démontrer que la premiere Ligne entiere AC est à sa premiere partie AB, comme la seconde Ligne entiere DE est à sa premiere partie DB.

REMARQUE.

213 Il faut remarquer que si l'on avoit

$$AB:BC > DB:BE$$

on trouveroit $AB+BC:AB < DB+BE:DB$.

Car le premier arrangement donneroit (N^o. 198.) $BC \times DB < AB \times BE$; & ajoutant $AB \times DB$ à chaque membre, on trouveroit que $AB \times DB + BC \times DB$ produit des Extrêmes dans le second arrangement, seroit plus petit que $AB \times DB + AB \times BE$ produit des Moyens du même second arrangement. Ainsi (N^o. 205.) $AB+BC:AB < DB+BE:DB$.

On démontrera de la même maniere que si l'on avoit $AB:BC < DB:BE$, l'on trouveroit au contraire $AB+BC:AB > DB+BE:DB$.

CINQUIÈME

CINQUIÈME REGLE.

214 Si l'on a une Proportion géométrique $AB : DB :: BC : BE$, on pourra la changer en celle-ci $AB + BC : DB + BE :: BC : BE$ ou $:: AB : DB$; c'est-à-dire, que la somme des Antécédens sera à la somme des Conséquens, comme un Antécédent à son Conséquent.

DÉMONSTRATION.

Le produit des Extrêmes des quatre nouveaux termes $(AB + BC)$, $(DB + BE)$, BC , BE , sera $AB \times BE + BC \times BE$; & le produit de leurs Moyens sera $DB \times BC + BE \times BC$.

Mais puisque (hyp.) $AB : DB :: BC : BE$, on a (No. 196.) $AB \times BE = DB \times BC$, & les deux produits $BC \times BE$, $BE \times BC$, sont identiques. Donc le produit des Extrêmes des quatre nouveaux termes est égal au produit de leurs Moyens; & par conséquent (No. 201.) ces quatre termes sont en Proportion géométrique, c'est-à-dire, que $AB + BC : DB + BE :: BC : BE$ ou $:: AB : DB$. Ce qu'il falloit démontrer.

AUTRE DÉMONSTRATION.

Puisque $AB : DB :: BC : BE$, on aura *Alternando* (No. 206.) $AB : BC :: DB : BE$.

Changeant cette Proportion *Compōnendo* (No. 210.) on aura $AB + BC : BC :: DB + BE : BE$.

Changeant encore cette dernière Proportion *Alternando*, l'on aura $AB + BC : DB + BE :: BC : BE$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

215 Donc si l'on a un nombre quelconque de Rapports égaux tels que ceux-ci

$$AB : MN :: BC : NO :: CD : OP :: DE : PQ \text{ \&c.}$$

Géom.

K *

La somme de deux Antécédens quelconques sera à la somme de leurs Conséquens, comme l'Antécédent de l'un des Rapports égaux est à son Conséquent.

Ou si les Rapports égaux sont écrits en deux Suites $AB:BC:CD:DE:\&c::MN:NO:OP:PQ:\&c$, la somme de deux termes quelconques de la premiere Suite de proportionnelles, sera à la somme de deux termes correspondans de la seconde Suite, comme un terme de la premiere Suite est au terme correspondant de la seconde Suite. Car les Rapports égaux $AB:MN::BC:NO::CD:OP::DE:PQ\&c$, & les deux Suites de proportionnelles $AB:BC:CD:DE:\&c::MN:NO:OP:PQ:\&c$, donneront les Proportions suivantes.

$$\begin{array}{ll} AB:MN::BC:NO. & BC:NO::CD:OP. \\ AB:MN::CD:OP. & BC:NO::DE:PQ. \\ AB:MN::DE:PQ. & CD:OP::DE:PQ. \\ & \&c. \end{array}$$

Donc puisque (N^o. 214.) la somme des deux Antécédens d'une Proportion géométrique est à la somme de ses deux Conséquens, comme un Antécédent est à son Conséquent, on aura

$$\begin{array}{l} AB+BC:MN+NO::AB:MN \\ AB+CD:MN+OP::AB:MN \\ AB+DE:MN+PQ::AB:MN \\ BC+CD:NO+OP::BC:NO \\ BC+DE:NO+PQ::BC:NO \\ CD+DE:OP+PQ::CD:OP \text{ ou }::DE:PQ \\ \&c. \end{array}$$

Mais (*hyp.*) tous les seconds Rapports de ces dernieres Proportions sont égaux, c'est-à-dire, que $AB:MN::BC:NO::CD:OP::DE:PQ\&c$.

$$\text{Donc } \left\{ \begin{array}{l} AB+BC : MN+NO \\ AB+CD : MN+OP \\ AB+DE : MN+PQ \\ BC+CD : NO+OP \\ BC+DE : NO+PQ \\ CD+DE : OP+PQ \\ \&c. \end{array} \right\} :: AB : MN \text{ ou } :: BC : NO \text{ ou } :: CD : OP \text{ ou } :: DE : PQ \&c.$$

COROLLAIRE II.

216 Lorsqu'on a plusieurs Rapports égaux tels que $AB : MN :: BC : NO :: CD : OP :: DE : PQ \&c$, la somme de trois Antécédens quelconques est à la somme de leurs Conséquens, comme un Antécédent est à son Conséquent.

Ou si les Rapports égaux sont écrits en deux Suites $AB : BC : CD : DE : \&c :: MN : NO : OP : PQ : \&c$,

La somme de trois termes quelconques de la première Suite, est à la somme de trois termes correspondans de la seconde Suite, comme un terme quelconque de la première Suite est au terme correspondant de la seconde.

Car les Rapports égaux ou les deux Suites de proportionnelles donneront (N^o. 215.)

$$\begin{array}{l} AB+BC : MN+NO :: CD : OP \\ AB+BC : MN+NO :: DE : PQ \\ BC+CD : NO+OP :: DE : PQ \end{array}$$

Mais (N^o. 214.) la somme des deux Antécédens d'une Proportion géométrique est à la somme de ses deux Conséquens, comme un Antécédent est à son Conséquent. On aura donc

$$\begin{array}{l} AB+BC+CD : MN+NO+OP :: CD : OP \\ AB+BC+DE : MN+NO+PQ :: DE : PQ \\ BC+CD+DE : NO+OP+PQ :: DE : PQ \end{array}$$

Mais (*hyp.*) les seconds Rapports de ces Proportions sont égaux entr'eux & aux Rapports de AB à MN , de BC à NO , &c ; c'est-à-dire, que
 $AB : MN :: BC : NO :: CD : OP :: DE : PQ$ &c.

$$\text{Donc } \left\{ \begin{array}{l} AB+BC+CD : MN+NO+OP \\ AB+BC+DE : MN+NO+PQ \\ BC+CD+DE : NO+OP+PQ \end{array} \right\} :: AB : MN \text{ ou } :: BC : NO \text{ ou } :: CD : OP \text{ ou } :: DE : PQ \text{ \&c.}$$

C O R O L L A I R E III.

217 Si l'on a un nombre quelconque de Rapports égaux $AB : MN :: BC : NO :: CD : OP :: DE : PQ$ &c, on démontrera de la même manière que la somme de quatre Antécédens ou d'un nombre quelconque d'Antécédens, est à la somme de leurs Conséquens, comme un seul Antécédent est à son Conséquent.

Et si les Rapports égaux sont écrits en deux Suites $AB : BC : CD : DE : \&c :: MN : NO : OP : PQ : \&c$, on fera voir que la somme de quatre termes ou d'un nombre quelconque de termes de la première Suite de proportionnelles est à la somme des termes correspondans de la seconde Suite, comme un terme quelconque de la première Suite est au terme correspondant de la seconde.

Enfin l'on démontrera que la somme de tous les Antécédens des Rapports égaux est à la somme de tous leurs Conséquens, comme un Antécédent est à son Conséquent ; ou que la somme des termes qui composent une première Suite de proportionnelles, est à la somme des termes qui composent la seconde Suite, comme un terme quelconque de la première Suite est au terme correspondant de la seconde.

Car les Rapports égaux

$$AB : MN :: BC : NO :: CD : OP :: DE : PQ \text{ \&c}$$

& les deux Suites de proportionnelles

$$AB : BC : CD : DE : \&c :: MN : NO : OP : PQ : \&c$$

donneront (N^o. 216.)

$$AB + BC + CD : MN + NO + OP :: DE : PQ.$$

Mais (N^o. 214.) la somme des deux Antécédens d'une Proportion géométrique est à la somme de ses deux Conséquens, comme un Antécédent est à son Conséquent.

Donc $AB + BC + CD + DE : MN + NO + OP + PQ :: DE : PQ.$

Et comme (*hyp.*) le Rapport de DE à PQ est égal aux Rapports de AB à MN , de BC à NO , de CD à OP , on aura

$$AB + BC + CD + DE : MN + NO + OP + PQ :: \begin{cases} AB : MN \\ BC : NO \\ CD : OP \\ DE : PQ. \end{cases}$$

COROLLAIRE IV.

218 Puisque plusieurs Rapports égaux

$$AB : MN :: BC : NO :: CD : OP :: DE : PQ \text{ \&c}$$

ou deux Suites de proportionnelles

$$AB : BC : CD : DE : \&c :: MN : NO : OP : PQ : \&c$$

donnent (N^o. 215.)

$$AB + BC : MN + NO$$

$$AB + CD : MN + OP$$

$$AB + DE : MN + PQ$$

$$BC + CD : NO + OP$$

$$BC + DE : NO + PQ$$

$$CD + DE : OP + PQ$$

&c.

& donnent (N^o. 216.)

$$AB + BC + CD : MN + NO + OP$$

$$AB + BC + DE : MN + NO + PQ$$

$$BC + CD + DE : NO + OP + PQ$$

&c.

& donnent (N^o. 217.)

$$AB + BC + CD + DE : MN + NO + OP + PQ$$

$$:: AB : MN \text{ ou } :: BC : NO \text{ ou } :: CD : OP \text{ ou } :: DE : PQ \text{ \&c.}$$

Il est clair que la somme de tant d'Antécédens qu'on voudra, sera à la somme de leurs Conséquens,

comme une autre somme quelconque d'Antécédens est à la somme de leurs Conséquens.

Ou si l'on a deux Suites de proportionnelles, la somme de tant de termes qu'on voudra de la premiere Suite sera à la somme des termes correspondans de la seconde Suite, comme une autre somme de termes de la premiere Suite, est à la somme de leurs termes correspondans dans la seconde Suite; c'est-à-dire, que l'on aura

$$\begin{aligned} AB + BC : MN + NO :: AB + CD : MN + OP \\ :: AB + DE : MN + PQ :: BC + CD : NO + OP \\ :: BC + DE : NO + PQ :: CD + DE : OP + PQ \\ :: AB + BC + CD : MN + NO + OP \\ :: AB + BC + DE : MN + NO + PQ \\ :: BC + CD + DE : NO + OP + PQ \\ :: AB + BC + CD + DE : MN + NO + OP + PQ \text{ \&c.} \end{aligned}$$

R E M A R Q U E.

219 On remarquera que si l'on avoit
 $AB : DB > BC : BE$

On auroit $\begin{cases} AB + BC : DB + BE > BC : BE \\ AB + BC : DB + BE < AB : DB \end{cases}$

Car le premier arrangement que l'on suppose donneroit (N^o. 198.) $AB \times BE > BC \times DB$. Cela posé,

1^o. Ajoûtant $BC \times BE$ à chaque membre de cette Inégalité, on auroit $AB \times BE + BC \times BE$, produit des Extrêmes du second arrangement, plus grand que $BC \times DB + BC \times BE$ produit des Moyens du même second arrangement. Ainsi (N^o. 205.) le second arrangement $AB + BC : DB + BE > BC : BE$ auroit nécessairement lieu.

2^o. Ajoûtant $AB \times DB$ à chaque membre de la même Inégalité $AB \times BE > BC \times DB$ ou $BC \times DB <$

$AB \times BE$, on trouveroit que $AB \times DB + BC \times DB$, produit des Extrêmes du troisiéme arrangement, seroit moindre que $AB \times DB + AB \times BE$ produit des Moyens du même troisiéme arrangement. Ainsi ce troisiéme arrangement $AB + BC : DB + BE < AB : DB$ auroit nécessairement lieu (N°. 205.).

On démontrera de la même maniere, que si l'on avoit
 $AB : DB < BC : BE$

On trouveroit $\begin{cases} AB + BC : DB + BE < BC : BE \\ AB + BC : DB + BE > AB : DB \end{cases}$

SIXIÈME REGLE.

220 Si l'on a une Proportion géométrique

Fig. 147.

$AC : BC :: DE : BE$, on pourra la changer en celle-ci
 $AC - BC : BC :: DE - BE : BE$.

Ce changement s'appelle **DIVIDENDO** ou **DETRAHENDO**.

DÉMONSTRATION.

Pour démontrer cette Regle, il suffit de faire voir (N°. 201.) que le produit des Extrêmes est égal au produit des Moyens ; c'est-à-dire, que $AC \times BE - BC \times BE = BC \times DE - BC \times BE$, ou que $AC \times BE = BC \times DE$. Or cette Égalité se déduit de la Proportion supposée $AC : BC :: DE : BE$. Donc $AC - BC : BC :: DE - BE : BE$. Ce qu'il falloit démontrer.

AUTRE DÉMONSTRATION.

1°. $AH : BH :: AC : BC$ (N°. 193.).

2°. $AC : BC :: DE : BE$ (hyp.).

3°. (N°. 193.) $DE : BE :: DH : BH$.

Donc $AH : BH :: DH : BH$; & par conséquent (N°. 190.) $AH = DH$,

Fig. 155
ou 157.

Otant BH de chaque membre, on aura $AE=DC$.

Donc (N^o. 200.) $AB:BC::DB:BE$; c'est-à-dire, que $AC-BC:BC::DE-BE:BE$. Ce qu'il falloit démontrer.

Lorsque deux Lignes AC , DE , seront coupées de manière que la première Ligne AC sera à sa seconde partie BC , comme la seconde Ligne DE à sa seconde partie BE , nous conclurons par cette sixième Règle que la première partie AB de la première Ligne est à sa seconde partie BC , comme la première partie DB de la seconde Ligne est à sa seconde partie BE .

R E M A R Q U E.

221 Nous remarquerons que si l'on avoit $AC:BC > DE:BE$, l'on auroit aussi *Detrahendo* $AC-BC:BC > DE-BE:BE$.

Car le premier arrangement donneroit (N^o. 198.) $AC \times BE > BC \times DE$: & retranchant le produit $BC \times BE$ de chaque membre de cette Inégalité, on trouveroit $AC \times BE - BC \times BE$, produit des Extrêmes du second arrangement, plus grand que $BC \times DE - BC \times BE$ produit des Moyens du même second arrangement. Ainsi le second arrangement $AC-BC:BC > DE-BE:BE$ auroit nécessairement lieu (N^o. 205.).

On démontrera de même que si l'on avoit $AC:BC < DE:BE$, l'on auroit aussi *Detrahendo* $AC-BC:BC < DE-BE:BE$.

SEPTIÈME REGLE.

222 Si l'on a une Proportion géométrique $AC:BC::DE:BE$, on pourra la changer ainsi $AC:AC-BC::DE:DE-BE$.

Ce changement s'appelle *CONVERTENDO*.

DÉMONSTRATION.

Le produit des Extrêmes des quatre nouveaux termes AC , $(AC - BC)$, DE , $(DE - BE)$, est $AC \times DE - AC \times BE$; & le produit des Moyens est $AC \times DE - BC \times DE$. Mais ces deux produits sont égaux; car

$$1^{\circ}. AC \times DE = AC \times DE.$$

2° . A cause que (*hyp.*) $AC : BC :: DE : BE$, on aura (N^o. 196.) $AC \times BE = BC \times DE$.

$$\text{Donc } AC : AC - BC :: DE : DE - BE.$$

Ce qu'il falloit démontrer.

AUTRE DÉMONSTRATION.

Puisque (*hyp.*) $AC : BC :: DE : BE$, on aura Fig. 155
(N^o. 220.) $AH = DH$; & ôtant BH de chaque ou 157.
membre, on aura $AE = DC$.

Comparant ensemble ces deux Égalités, on aura (N^o. 190.) $AH : AE :: DH : DC$. Mais

$$1^{\circ}. AC : AB :: AH : AE \text{ (N^o. 193.)}$$

$$2^{\circ}. \text{On a vu que } AH : AE :: DH : DC.$$

$$3^{\circ}. \text{(N^o. 193.) } DH : DC :: DE : DB.$$

Donc $AC : AB :: DE : DB$, c'est-à-dire, que $AC : AC - BC :: DE : DE - BE$. Ce qu'il falloit démontrer.

Lorsque deux Lignes AC , DE , seront coupées de manière que la première Ligne AC sera à sa seconde partie BC , comme la seconde Ligne DE à sa seconde partie BE , nous conclurons par cette septième Règle, que la première Ligne AC est à sa première partie AB , comme la seconde Ligne DE est à sa première partie DB .

REMARQUE.

223 On remarquera que si l'on avoit $AC : BC > DE : BE$, l'on trouveroit *Convertendo*
 $AC : AC - BC < DE : DE - BE$.

Car le premier arrangement qu'on suppose donneroit (N^o. 198.) $AC \times BE > BC \times DE$: & retranchant ces deux quantités inégales de la même quantité $AC \times DE$, on trouveroit $AC \times DE - AC \times BE$, produit des Extrêmes du second arrangement, plus petit que $AC \times DE - BC \times DE$ produit des Moyens du même second arrangement. Ainsi ce second arrangement $AC : AC - BC < DE : DE - BE$ auroit nécessairement lieu.

On prouvera de même que si l'on avoit $AC : BC < DE : BE$, l'on trouveroit *Convertendo* $AC : AC - BC > DE : DE - BE$.

HUITIÈME REGLE.

224 Si l'on a une Proportion géométrique $AC : DE :: BC : BE$, on pourra la changer en celle-ci $AC : DE :: AC - BC : DE - BE$; c'est-à-dire, qu'un Antécédent sera à son Conséquent, comme la différence des Antécédens est à la différence des Conséquens.

DÉMONSTRATION.

Le produit des Extrêmes est $AC \times DE - AC \times BE$, & le produit des Moyens est $AC \times DE - DE \times BC$.

Or 1^o. $AC \times DE = AC \times DE$.

2^o. Puisque (*hyp.*) $AC : DE :: BC : BE$, on aura (196.) $AC \times BE = DE \times BC$ ou $-AC \times BE = -DE \times BC$. Ainsi les produits des Extrêmes & des Moyens sont égaux.

Donc $AC : DE :: AC - BC : DE - BE$.
Ce qu'il falloit démontrer.

AUTRE DÉMONSTRATION.

Puisque $AC : DE :: BC : BE$ (*hyp.*), on aura *Alternando* (N^o. 206.) $AC : BC :: DE : BE$.

Changeant cette Proportion *Convertendo* (N^o. 222.)
on aura $AC : AC - BC :: DE : DE - BE$.

Changeant encore cette dernière Proportion *Alternando*, on aura $AC : DE :: AC - BC : DE - BE$.
Ce qu'il falloit démontrer.

R E M A R Q U E.

225 Si l'on avoit $AC : DE > BC : BE$,
on trouveroit au contraire

$$AC : DE < AC - BC : DE - BE$$

$$BC : BE < AC - BC : DE - BE$$

Car le premier arrangement donneroit (N^o. 198.)
 $AC \times BE > BC \times DE$.

1^o. Retranchant ces deux membres inégaux de
la même quantité $AC \times DE$, on trouveroit que
 $AC \times DE - AC \times BE$, produit des Extrêmes dans
le second arrangement, seroit moindre que $AC \times DE$
 $- BC \times DE$ produit des Moyens dans le même se-
cond arrangement. Ainsi (N^o. 205.) le second ar-
rangement $AC : DE < AC - BC : DE - BE$
auroit nécessairement lieu.

2^o. Si de l'Inégalité $AC \times BE > BC \times DE$ ou
 $BC \times DE < AC \times BE$, on retranchoit la même quan-
tité $BC \times BE$, on trouveroit que $BC \times DE - BC \times BE$,
produit des Extrêmes dans le troisième arrangement,
seroit encore moindre que $AC \times BE - BC \times BE$ pro-
duit des Moyens dans le même troisième arrange-
ment. Ainsi le troisième arrangement auroit encore
lieu.

On remarquera encore, Et l'on prouvera de la même
manière, que si l'on avoit $AC : DE < BC : BE$

$$\text{On auroit } \begin{cases} AC : DE > AC - BC : DE - BE \\ BC : BE > AC - BC : DE - BE \end{cases}$$

NEUVIÈME REGLE.

Fig. 160 & 161. 226 Si l'on a deux Proportions géométriques quelcon-
 qués, par exemple

$$AC : BC :: MO : NO$$

$$DC : CE :: PO : OQ$$

Et qu'on les multiplie par ordre, c'est-à-dire, terme
 par terme correspondant, on aura cette nouvelle Proportion
 $AC \times DC : BC \times CE :: MO \times PO : NO \times OQ.$

DÉMONSTRATION.

Les huit termes qui composent les deux Propor-
 tions données, étant disposés comme on le voit
 dans les Figures 160, 161, de manière que ceux de
 la première soient perpendiculaires sur ceux de la
 seconde, on fera les deux Parallélogrammes rec-
 tangles DG , PS , & l'on tirera les deux Droites
 BF , NR , parallèles aux bases DE , PQ , de ces
 Rectangles. Cela posé, on aura

$$1^{\circ}. AE : BE :: AC : BC \text{ (N}^{\circ}. 193.).$$

$$2^{\circ}. AC : BC :: MO : NO \text{ (hyp.).}$$

$$3^{\circ}. \text{ (N}^{\circ}. 193.) MO : NO :: MQ : NQ$$

$$\text{Donc } AE : BE :: MQ : NQ, \text{ \& Alternando}$$

$$\text{(N}^{\circ}. 206.) AE : MQ :: BE : NQ.$$

On aura aussi

$$1^{\circ}. AD : AE :: DC : CE \text{ (N}^{\circ}. 193.).$$

$$2^{\circ}. \text{ (hyp.) } DC : CE :: PO : OQ.$$

$$3^{\circ}. \text{ (N}^{\circ}. 193.) PO : OQ :: MP : MQ$$

$$\text{Donc } AD : AE :: MP : MQ ; \text{ \& Alternando}$$

$$\text{l'on aura } AD : MP :: AE : MQ.$$

Mais on a trouvé $AE : MQ :: BE : NQ$. Donc
 $AD : MP :: BE : NQ$, & Alternando $AD : BE :: MP : NQ$;
 c'est-à-dire, $AC \times DC : BC \times CE :: MO \times PO : NO \times OQ$.
 Ce qu'il falloit démontrer.

AUTRE DÉMONSTRATION.

Puisque (hyp.) $\begin{cases} AC : BC :: MO : NO \\ DC : CE :: PO : OQ \end{cases}$

La première Proportion donnera (N^o. 196.)
 $AC \times NO = BC \times MO.$

La seconde Proportion donnera (N^o. 196.)
 $DC \times OQ = CE \times PO.$

Multipliant ces deux Égalités ensemble, c'est-à-dire, membre par membre, on aura

$$AC \times NO \times DC \times OQ = BC \times CE \times MO \times PO.$$

Mais les deux membres de cette Égalité sont les produits des Extrêmes & des Moyens des quatre termes $AC \times DC$, $BC \times CE$, $MO \times PO$, $NO \times OQ$.

Bonc (N^o. 201.) ces quatre termes font une Proportion géométrique. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE PREMIER.

227 Donc si l'on a plus de deux Proportions géométriques, par exemple, ces trois ci

$$AC : BC :: MO : NO$$

$$DC : CE :: PO : OQ$$

$$FG : GH :: RS : ST$$

On aura encore une Proportion géométrique, en les multipliant toutes ensemble par ordre, c'est-à-dire, terme par terme correspondant.

Car 1^o. les deux premières Proportions étant multipliées par ordre, donneront (N^o. 226.)

$$AC \times DC : BC \times CE :: MO \times PO : NO \times OQ.$$

2^o. Multipliant cette Proportion par ordre avec la troisième,

$$FG : GH :: RS : ST, \text{ on aura (N^o. 226.)}$$

$$AC \times DC \times FG : BC \times CE \times GH :: MO \times PO \times RS : NO \times OQ \times ST.$$

On pourra multiplier de même par ordre tant de Proportions qu'on voudra. & il en résultera toujours une Proportion géométrique.

COROLLAIRE II.

228 Donc si l'on a une Proportion géométrique ;
par exemple, $AB : BC :: DB : BE$,

$$\text{On aura} \left\{ \begin{array}{l} AB \times AB : BC \times BC :: DB \times DB : BE \times BE \\ AB \times AB \times AB : BC \times BC \times BC :: DB \times DB \times DB : BE \times BE \times BE \\ AB \times AB \times AB \times AB : BC \times BC \times BC \times BC :: DB \times DB \times DB \times DB : BE \times BE \times BE \times BE \\ \text{\&c.} \end{array} \right.$$

Car écrivant la Proportion $AB : BC :: DB : BE$ autant de fois que l'on voudra, comme ici

$$AB : BC :: DB : BE$$

$$AB : BC :: DB : BE$$

$$AB : BC :: DB : BE$$

$$\bullet AB : BC :: DB : BE$$

1°. Si l'on multiplie deux de ces Proportions par ordre, on aura

$$AB \times AB : BC \times BC :: DB \times DB : BE \times BE.$$

2°. Si l'on multiplie trois de ces Proportions par ordre, on aura

$$AB \times AB \times AB : BC \times BC \times BC :: DB \times DB \times DB : BE \times BE \times BE.$$

3°. Si l'on multiplie quatre Proportions par ordre, on aura

$$AB \times AB \times AB \times AB : BC \times BC \times BC \times BC :: DB \times DB \times DB \times DB : BE \times BE \times BE \times BE.$$

& ainsi des autres.

$$\text{Au lieu d'écrire} \left\{ \begin{array}{l} AB \times AB \text{ qui signifie le Carré de } AB \text{ ou 1e Puissance de } AB \\ AB \times AB \times AB \text{ qui signifie le Cube de } AB \text{ ou 3e Puissance de } AB \\ AB \times AB \times AB \times AB \text{ qu'on appelle la 4e Puissance de } AB \\ AB \times AB \times AB \times AB \times AB \text{ qu'on appelle la 5e Puissance de } AB \\ \text{\&c.} \end{array} \right\} \text{on écrit pour abrégé} \left\{ \begin{array}{l} \overline{AB}^2 \\ \overline{AB}^3 \\ \overline{AB}^4 \\ \overline{AB}^5 \\ \text{\&c.} \end{array} \right.$$

On fera la même chose pour les différentes Puissances de BC , DB , BE ; c'est-à-dire, qu'au lieu d'écrire $BC \times BC$ qui signifie le Carré ou la seconde Puissance de BC , on écrira \overline{BC}^2 ; & au lieu d'écrire $DB \times DB \times DB$ qui signifie le Cube ou la troisième Puissance de DB , on écrira \overline{DB}^3 ; & ainsi des autres Puissances des différentes Lignes.

On peut donc conclure que quand quatre Grands seront en Proportion géométrique, toutes leurs Puissances de même degré seront aussi en Proportion géométrique ; c'est-à-dire, que si l'on a

$$AB : BC :: DB : BE$$

On aura aussi

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} : \overline{BC} :: \overline{DB} : \overline{BE} \\ \overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: \overline{DB}^2 : \overline{BE}^2 \\ \overline{AB}^3 : \overline{BC}^3 :: \overline{DB}^3 : \overline{BE}^3 \\ \overline{AB}^4 : \overline{BC}^4 :: \overline{DB}^4 : \overline{BE}^4 \\ \text{\&c.} \end{array} \right.$$

COROLLAIRE III.

229 Donc si l'on a une Suite AB, BC, CD, DE, EF , composée de tant de termes que l'on voudra, le Rapport du premier terme AB , au dernier EF , fera égal au Rapport qui résultera de la multiplication par ordre du Rapport du premier terme au second, du Rapport du second au troisième, de celui du troisième au quatrième, & de celui du quatrième au dernier. Car si l'on écrit tous ces Rapports les uns sous les autres,

On aura

$$\left\{ \begin{array}{l} AB : BC \\ BC : CD \\ CD : DE \\ DE : EF \end{array} \right.$$

Et multipliant tous ces Rapports par ordre, on aura le Rapport de $AB \times BC \times CD \times DE$ à $BC \times CD \times DE \times EF$,

Et comme ce Rapport composé ne changera point (N^o. 191.), en divisant son Antécédent & son Conséquent par la même quantité $BC \times CD \times DE$, il deviendra égal au Rapport de AB à EF ; c'est-à-dire, que l'on aura

$$AB:EF::AB \times BC \times CD \times DE:BC \times CD \times DE \times EF.$$

R E M A R Q U E.

230 On remarquera que

Fig. 162
& 161.

1^o. Si l'on avoit $\begin{cases} AC:BC > MO:NO \\ DC:CE::PO:OQ \end{cases}$

On auroit en multipliant par ordre
 $AC \times DC:BC \times CE > MO \times PO:NO \times OQ.$

Car après avoir fait des Rectangles AD, BE, MP, NQ , qui représentent ces quatre termes résultans de la multiplication par ordre, si l'on retranche de AC une partie AI telle que le reste IC soit en Proportion avec les trois termes BC, MO, NO , c'est-à-dire, telle que l'on ait $IC:BC::MO:NO$; & qu'on multiplie cette Proportion par ordre avec celle-ci
 $DC:CE::PO:OQ;$

On aura $ID \times DC:BC \times CE::MO \times PO:NO \times OQ$ (N^o. 226.); c'est-à-dire, qu'en tirant NI parallèle à DC , l'on aura $ID:BE::MP:NQ$.

Mais $AD > ID$, parce que $AC > IC$. Donc on aura $AD:BE > MP:NQ$; c'est-à-dire, $AC \times DC:BC \times CE > MO \times PO:NO \times OQ.$

Fig. 163
& 161.

2^o. Si l'on avoit $\begin{cases} AC:BC > MO:NO \\ DC:CE > PO:OQ \end{cases}$

On auroit en multipliant par ordre
 $AC \times DC:BC \times CE > MO \times PO:NO \times OQ.$

Car

Car ayant représenté ces quatre termes résultans de la multiplication par ordre, par quatre Rectangles AD, BE, MP, NQ , si l'on retranche de AC une partie AI telle que l'on ait $IC : BC :: MO : NO$, & qu'on retranche de DC une partie DH telle que l'on ait

$$HC : CE :: PO : OQ,$$

& qu'ensuite on multiplie ces deux Proportions par ordre, on aura $IC \times HC : BC \times CE :: MO \times PO : NO \times OQ$ (N°. 226.) ; c'est-à-dire, qu'en tirant NI parallèle à DC , & HN parallèle à AC , l'on aura $IH : BE :: MP : NQ$.

Mais $AD > IH$, parce que $AC > IC$ & $DC > HC$.

Ainsi $AD : BE > MP : NQ$ ou
 $AC \times DC : BC \times CE > MO \times PO : NO \times OQ$.

On démontrera de la même manière que

$$\text{Si l'on avoit } \begin{cases} AC : BC < MO : NO \\ DC : CE :: PO : OQ \end{cases}$$

Fig. 164
& 161.

$$\text{Ou si l'on avoit } \begin{cases} AC : BC < MO : NO \\ DC : CE < PO : OQ \end{cases}$$

Fig. 165,
& 161.

On auroit dans l'un & l'autre cas, en multipliant par ordre,

$$AC \times DC : BC \times CE < MO \times PO : NO \times OQ.$$

La Démonstration de ces deux cas ne différera de celle des deux précédens, qu'en ce que, au lieu de retrancher de AC une partie AI , & de DC une partie HD , il faudra dans les deux nouveaux cas ajouter à AC une partie AI , & dans le second cas ajouter à DC une partie HD ; de manière que l'on ait

$$\left. \begin{matrix} IC : BC :: MO : NO \\ DC : CE :: PO : OQ \end{matrix} \right\} \text{ ou } \left. \begin{matrix} IC : BC :: MO : NO \\ HC : CE :: PO : OQ \end{matrix} \right\}$$

DIXIÈME RÈGLE.

231 Si l'on divise les quatre termes d'une Proportion $AD:BE::MP:NQ$ par les quatre termes correspondans d'une autre Proportion $AC:BC::MO:NO$, ce qu'on appelle **DIVISER PAR ORDRE**, les quatre Quotiens qui résulteront de ces Divisions seront en Proportion ; c'est-à-dire, qu'on aura $\frac{AD}{AC} : \frac{BE}{BC} :: \frac{MP}{MO} : \frac{NQ}{NO}$.

DÉMONSTRATION.

Car les quatre Quotiens $\frac{AD}{AC}$, $\frac{BE}{BC}$, $\frac{MP}{MO}$, $\frac{NQ}{NO}$, étant multipliés par ordre par les quatre Diviseurs $AC:BC::MO:NO$, doivent reproduire les quatre Dividendes, c'est-à-dire, les quatre termes de la Proportion $AD:BE::MP:NQ$.

Mais si les quatre Quotiens $\frac{AD}{AC}$, $\frac{BE}{BC}$, $\frac{MP}{MO}$, $\frac{NQ}{NO}$, n'étoient point en Proportion, en les multipliant par les quatre termes de la Proportion $AC:BC::MO:NO$, les quatre produits AD , BE , MP , NQ , ne seroient point en Proportion (N^o. 230.). Donc puisque les quatre Produits AD , BE , MP , NQ , sont supposés en Proportion, il faut que les quatre Quotiens $\frac{AD}{AC}$, $\frac{BE}{BC}$, $\frac{MP}{MO}$, $\frac{NQ}{NO}$, soient aussi en Proportion. Ce qu'il falloit démontrer.

ONZIÈME RÈGLE.

232 Si quatre Quarrés sont en Proportion, les Racines ou côtés de ces Quarrés seront aussi en Proportion ; c'est-à-dire, que si l'on a $\overline{AB} : \overline{BC} :: \overline{DB} : \overline{BE}$, on aura aussi $AB : BC :: DB : BE$.

DÉMONSTRATION.

Car si la premiere Racine AB étoit trop grande ou trop petite pour être en Proportion avec les trois

autres BC , DB , BE ; c'est-à-dire, si l'on avoit
 $AB:BC > DB:BE$ ou $AB:BC < DB:BE$,
 en multipliant ces quatre termes par eux-mêmes,
 savoir, par

$AB:BC > DB:BE$ ou par $AB:BC < DB:BE$,
 on auroit (No. 230.)

$\overline{AB}:\overline{BC} > \overline{DB}:\overline{BE}$ ou $\overline{AB}:\overline{BC} < \overline{DB}:\overline{BE}$;
 ce qui seroit contraire à l'hypothèse, puisqu'on sup-
 pose $\overline{AB}:\overline{BC}::\overline{DB}:\overline{BE}$.

Donc la premiere Racine AB n'est ni trop gran-
 de ni trop petite pour être en Proportion avec les
 trois autres BC , DB , BE ; & par conséquent
 $AB:BC::DB:BE$. Ce qu'il falloit démontrer.

R E M A R Q U E.

233 On démontrera de la même maniere que si
 quatre Cubes, ou quatre quatrièmes Puissances, ou
 quatre Puissances quelconques semblables, sont en
 Proportion, les Racines de ces Puissances seront
 aussi en Proportion; c'est-à-dire, que si l'on a
 $\overline{AB}:\overline{BC}::\overline{DB}:\overline{BE}$ ou $\overline{AB}:\overline{BC}::\overline{DB}:\overline{BE}$;

On aura aussi $AB:BC::DB:BE$.

Car si la premiere Racine AB étoit trop grande
 ou trop petite pour être en Proportion avec les trois
 autres BC , DB , BE , c'est-à-dire, si l'on trouvoit
 $AB:BC > DB:BE$ ou $AB:BC < DB:BE$;
 en multipliant ces quatre termes par eux-mêmes,
 on auroit (No. 230.)

$\overline{AB}:\overline{BC} > \overline{DB}:\overline{BE}$ ou $\overline{AB}:\overline{BC} < \overline{DB}:\overline{BE}$;
 & multipliant ces quatre termes par ordre par leurs
 Racines, on auroit

$\overline{AB}:\overline{BC} > \overline{DB}:\overline{BE}$ ou $\overline{AB}:\overline{BC} < \overline{DB}:\overline{BE}$;
 ce qui seroit contre l'hypothèse.

En multipliant encore ces quatre nouveaux termes par ordre avec leurs Racines, on trouveroit $\overline{AB} : \overline{BC} > \overline{DB} : \overline{BE}$ ou $\overline{AB} : \overline{BC} < \overline{DB} : \overline{BE}$; ce qui seroit contraire à la supposition.

Et continuant de multiplier ces nouveaux termes par leurs Racines, afin d'avoir toujours de nouvelles Puissances semblables, on trouveroit que ces Puissances ne seroient point en Proportion; ce qui impliqueroit contradiction.

Donc si quatre Puissances semblables quelconques sont en Proportion, la Racine de la première ne peut être trop grande ni trop petite pour être en Proportion avec les trois autres, sans impliquer contradiction; d'où il suit que si l'on a quatre Cubes ou quatre quatrièmes Puissances, ou enfin quatre Puissances semblables en Proportion, les Racines de ces quatre Puissances seront aussi en Proportion.

DOUZIÈME REGLE.

234 Soient deux Suites de Grandeurs

A B, B C, C D, D E, &c.

M N, N O, O P, P Q, &c.

telles que l'on ait $\left\{ \begin{array}{l} 1^{\circ}. AB : BC :: OP : PQ \\ 2^{\circ}. BC : CD :: NO : OP \\ 3^{\circ}. CD : DE :: MN : NO \end{array} \right.$

On aura $AB : DE :: MN : PQ$.

Ce changement s'appelle CONCLUSION DE PROPORTION TROUBLÉE ou MAL ORDONNÉE.

DÉMONSTRATION.

Multipliant par ordre toutes les Proportions que l'hypothèse renferme, on aura

$$AB \times BC \times CD : BC \times CD \times DE :: OP \times NO \times MN : PQ \times OP \times NO.$$

Divisant ensuite les deux termes du premier Rapport par $BC \times CD$, & les deux termes du second Rapport par $OP \times NO$, ce qui ne changera point ces Rapports (N^o. 192.), on trouvera $AB : DE :: MN : PQ$. Ce qu'il falloit démontrer.

SCHOLIE.

235 Lorsque les Proportions données pour les multiplier par ordre, ont eu des termes égaux parmi les Antécédens & les Conséquens des Rapports dont elles étoient composées, on a commencé par multiplier ensemble tous les termes correspondans de ces Proportions; ensuite on a divisé les termes de chaque Rapport de la Proportion composée, par les Quantités qui se sont trouvées les mêmes dans son Antécédent & dans son Conséquent.

Par exemple, lorsqu'on a eu à multiplier par ordre

$$\text{ces trois Proportions} \begin{cases} AB : BC :: OP : PQ \\ BC : CD :: NO : OP \\ CD : DE :: MN : NO \end{cases}$$

On en a premièrement fait cette Proportion composée

$$AB \times BC \times CD : BC \times CD \times DE :: OP \times NO \times MN : PQ \times OP \times NO.$$

Ensuite ayant remarqué que les deux premiers termes de cette Proportion contenoient les deux mêmes Facteurs BC , CD , on les a divisés par ces deux Facteurs; c'est-à-dire, qu'on a supprimé ces deux Facteurs dans les deux premiers termes de la Proportion composée où ils se trouvoient: & ayant aussi remarqué que les deux derniers termes de la Proportion composée contenoient les mêmes Facteurs OP , NO , on a encore supprimé ces Facteurs dans ces deux ter-

termes. Par ces divisions, la Proportion composée, résultante de la multiplication par ordre des trois Proportions données, a été réduite à cette simple Proportion.

$$AB : DE :: MN : PQ.$$

Pour s'épargner la peine d'écrire, dans les Proportions composées, les Facteurs qui doivent en être supprimés, on remarquera que les termes qui seront les mêmes parmi les premiers Antécédens & les premiers Conséquens des Proportions qu'il faudra multiplier par ordre, seront nécessairement Facteurs dans les deux premiers termes de la Proportion composée, & pourront par conséquent être supprimés de cette dernière Proportion; & que les termes qui seront les mêmes parmi les seconds Antécédens & les seconds Conséquens des mêmes Proportions, seront Facteurs des deux derniers termes de la Proportion composée, & pourront par conséquent être supprimés. Ainsi avant de multiplier par ordre les Proportions données, on pourra supprimer les termes qui seront les mêmes parmi les premiers Antécédens & les premiers Conséquens, & supprimer aussi les termes qui seront les mêmes parmi les seconds Antécédens & les seconds Conséquens.

Par exemple, si l'on doit multiplier par ordre ces trois Proportions

$$AB : \underline{BC} :: \underline{OP} : PQ$$

$$\underline{BC} : \underline{CD} :: \underline{NO} : \underline{OP}$$

$$\underline{CD} : DE :: MN : \underline{NO}$$

on remarquera que les termes BC , CD , qui se trouvent parmi les premiers Antécédens & les premiers

Conséquens, seront nécessairement Facteurs des deux premiers termes de la Proportion composée, & peuvent par conséquent être supprimés; & que les termes OP , NO , qui se trouvent parmi les seconds Antécédens & les seconds Conséquens, seront Facteurs des deux derniers termes de la Proportion composée, & peuvent être aussi supprimés. Ainsi avant de multiplier par ordre, on barrera ou bien on soulignera parmi les premiers Antécédens & parmi les premiers Conséquens, les termes BC , CD , pour marquer qu'ils doivent être supprimés dans la multiplication par ordre; & l'on barrera ou bien on soulignera pareillement parmi les seconds Antécédens & les seconds Conséquens, les termes OP , NO , pour marquer qu'ils doivent aussi être supprimés. Dans l'Exemple proposé, on a mieux aimé, pour la plus grande commodité de l'impression, souligner les termes qui doivent être supprimés, que de les barrer.

Les termes qui doivent être supprimés dans les Proportions qu'on doit multiplier par ordre, étant ainsi soulignés, on ne multipliera par ordre que les termes qui ne seront pas soulignés; & comme dans l'Exemple proposé il ne restera des trois Proportions données que les quatre termes AB , DE , MN , PQ , on conclura tout d'un coup que la Proportion simple $AB : DE :: MN : PQ$ est la résultante des trois Proportions qu'on a proposé de multiplier par ordre.

2°. Puisqu'en alternant une Proportion, l'on rend ses deux Antécédens les deux premiers termes, & ses deux Conséquens les deux derniers termes d'une autre Proportion, & qu'on peut diviser les deux premiers termes ou les deux derniers termes d'une Proportion par telle Grandeur qu'on veut, sans troubler cette Proportion, il est clair qu'on peut aussi diviser les deux Antécédens ou les deux Conséquens d'une

Proportion par telle Grandeur qu'on veut, sans déranger cette Proportion.

Par exemple, si l'on avoit cette Proportion

$$AB \times OP : BC \times NO :: OP \times CD : PQ \times BC,$$

on diviseroit les deux Antécédens par OP , & les deux Conséquens par BC ; ce qui la réduiroit à celle-ci:

$$AB : NO :: CD : PQ.$$

Car en alternant la premiere Proportion, l'on auroit celle-ci,

$$AB \times OP : OP \times CD :: BC \times NO : PQ \times BC,$$

dont les deux premiers termes étant divisés par OP , & les deux derniers termes par BC , donneroient $AB : CD :: NO : PQ$, & *Alternanda* $AB : NO :: CD : PQ$.

Comme les termes qui se trouveront les mêmes parmi les premiers & seconds Antécédens, ou parmi les premiers & seconds Conséquens des Proportions qu'il faudra multiplier par ordre, seront nécessairement Facteurs dans les deux Antécédens ou dans les deux Conséquens de la Proportion composée, il est clair par ce qui vient d'être dit, qu'avant de multiplier par ordre plusieurs Proportions, les termes qui se trouveront les mêmes parmi les premiers & seconds Antécédens de ces Proportions pourront être barrés ou soulignés, pour marquer qu'ils doivent être supprimés; & que les termes qui seront les mêmes parmi les premiers & seconds Conséquens, pourront pareillement être barrés & soulignés pour être rejetés; en sorte qu'on ne multipliera par ordre, que les termes qui ne seront pas barrés ou soulignés; ce qui épargnera la peine d'écrire des Facteurs inutiles dans les termes de la Proportion composée.

Q.
es
=
es
gr
s le
l. 2
ul.
s p
e. 2
es
t es
ient
mes
re n
e, 2
es; 2
m. 2

Par exemple, si l'on devoit multiplier par ordre ces deux Proportions.

$$AB : \underline{BC} :: \underline{OP} : PQ$$

$$\underline{OP} : NO :: CD : \underline{BC}$$

on souligneroit OP , qui est parmi les premiers & seconds Antécédens ; on souligneroit pareillement BC , qui se trouve parmi les premiers & seconds Conséquens : ensuite on multiplieroit par ordre les termes qui ne seroient point soulignés ; c'est-à-dire, que dans le cas présent on prendroit les quatre termes restans pour en faire une Proportion, & que l'on auroit

$$AB : NO :: CD : PQ.$$

3°. Enfin il résulte de tout ce qui vient d'être dit, que si l'on a plusieurs Proportions à multiplier par ordre, par exemple, celles-ci

$$AB : \underline{BC} :: \underline{OP} : PQ$$

$$\underline{BC} : \underline{NO} :: \underline{CD} : \underline{OP}$$

$$\underline{CD} : DE :: MN : \underline{NO}$$

il faudroit, suivant la première partie de ce Scholie, souligner d'abord BC parmi les premiers Antécédens & les premiers Conséquens ; puis souligner OP parmi les seconds Antécédens & les seconds Conséquens. Ensuite il faudroit, suivant la seconde partie du Scholie, souligner CD qui se trouve parmi les premiers & seconds Antécédens, & souligner enfin NO qui est parmi les premiers & seconds Conséquens. Tous ces termes étant soulignés, il ne resteroit pour le résultat de la multiplication par ordre que cette Proportion.

$$AB : DE :: MN : PQ.$$

TREIZIÈME REGLE.

236 Si l'on a une Progression géométrique

$$\therefore AB : BC : CD : DE : EF : \&c.$$

$$\text{On aura } \left\{ \begin{array}{l} AB : BC :: AB : BC \\ \overline{AB} : \overline{BC} :: AB : CD \\ \overline{AB} : \overline{BC} :: AB : DE \\ \overline{AB} : \overline{BC} :: AB : EF \\ \&c. \end{array} \right.$$

C'est-à-dire, que
Une Puissance quelconque du premier terme de la Progression

Est à une Puissance semblable du second terme.

Comme le premier terme

Est à celui dont le Numéro est plus grand d'une unité que le degré de la Puissance où les deux premiers termes sont élevés.

DÉMONSTRATION.

Puisque (N^o. 189.) chaque terme de la Progression géométrique $\therefore AB : BC : CD : DE : EF : \&c$ contient également celui qui le suit, ou est également contenu en lui,

$$\text{On aura ces Proportions } \left\{ \begin{array}{l} AB : BC :: AB : BC \\ AB : BC :: BC : CD \\ AB : BC :: CD : DE \\ AB : BC :: DE : EF \\ \&c. \end{array} \right.$$

1^o. Multipliant par ordre les deux premières Pro-

portions, & (N^o. 235.) supprimant BC qui se trouve parmi les Antécédens & les Conséquens des seconds Rapports, on trouvera

$$\overline{AB}^2 : \overline{BC} :: AB : CD.$$

2^o. Multipliant par ordre les trois premières Proportions, en observant (N^o. 235.) de supprimer les termes BC , CD , qui se trouvent parmi les Antécédens & les Conséquens des seconds Rapports, on trouvera

$$\overline{AB}^3 : \overline{BC}^3 :: AB : DE.$$

3^o. Multipliant par ordre les quatre premières Proportions, en observant (N^o. 235.) de supprimer les termes BC , CD , DE , qui se trouvent parmi les Antécédens & les Conséquens des seconds Rapports, on trouvera

$$\overline{AB}^4 : \overline{BC}^4 :: AB : EF$$

& ainsi des autres Puissances de AB & de BC ;

Il est donc démontré que si l'on a

$$\therefore AB : BC : CD : DE : EF : \&c.$$

$$\text{On aura } \left\{ \begin{array}{l} AB : BC :: AB : BC \\ \overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: AB : CD \\ \overline{AB}^3 : \overline{BC}^3 :: AB : DE \\ \overline{AB}^4 : \overline{BC}^4 :: AB : EF \\ \&c. \end{array} \right.$$

Ce qu'il falloit démontrer.

QUATORZIÈME REGLE.

237 Si l'on a une Progression géométrique

$$\therefore AB : BC : CD : DE : EF :$$

On en pourra conclurre ces deux Proportions

$$AB - BC : AB :: AB - EF : AB + BC + CD + DE$$

$$BC - AB : AB :: EF - AB : AB + BC + CD + DE$$

c'est-à-dire, que

La différence des deux premiers termes

Est au premier terme,

Comme la différence du premier terme au dernier

Est à la somme de tous les termes qui précèdent le dernier.

DÉMONSTRATION.

Puisque dans la Progression géométrique

$$\therefore AB : BC : CD : DE : EF :$$

chaque terme contient également celui qui le suit ; ou est également contenu en lui (N^o. 189.), on en pourra faire cette Suite de Rapports égaux

$$AB : BC :: BC : CD :: CD : DE :: DE : EF.$$

Et puisque (N^o. 217.) un seul Antécédent est à son Conséquent, comme la somme des Antécédens est à la somme des Conséquens, on aura

$$AB : BC :: AB + BC + CD + DE : BC + CD + DE + EF.$$

ou *Invertendo*

$$BC : AB :: BC + CD + DE + EF : AB + BC + CD + DE.$$

Changeant la première de ces deux Proportions

Convertendo (N^o. 222.), puis changeant encore celle qu'on trouvera *Invertendo* (N^o. 204.), & changeant la seconde Proportion *Dividendo* (N^o. 220.); on aura

$$AB - BC : AB :: AB + BC + CD + DE - BC - CD - DE - EF : AB + BC + CD + DE.$$

$$BC - AB : AB :: BC + CD + DE + EF - AB - BC - CD - DE : AB + BC + CD + DE.$$

Ou si l'on supprime les quantités BC, CD, DE , qui se détruisent dans le troisième terme de chacune de ces Proportions, on aura enfin

$$AB - BC : AB :: AB - EF : AB + BC + CD + DE$$

$$BC - AB : AB :: EF - AB : AB + BC + CD + DE$$

Ce qu'il falloit démontrer.

238 On démontrera de la même manière que

$$AB - BC : BC :: AB - EF : BC + CD + DE + EF.$$

$$BC - AB : BC :: EF - AB : BC + CD + DE + EF.$$

c'est-à-dire, que

La différence des deux premiers termes

Est au second terme,

Comme la différence du premier terme au dernier

Est à la somme de tous les termes qui suivent le premier.

Car ayant repris ces deux Proportions contenues dans la démonstration de la présente Règle,

$$AB : BC :: AB + BC + CD + DE : BC + CD + DE + EF$$

$$BC : AB :: BC + CD + DE + EF : AB + BC + CD + DE$$

Si l'on change la première *Dividendo* (N^o. 220.), & qu'après avoir changé la seconde *Convertendo* (N^o. 222.), on la change encore *Invertendo* (N^o. 204.), on trouvera, après avoir effacé ce qui se détruira dans le troisième terme de chaque Proportion résultante,

$$AB - BC : BC :: AB - EF : BC + CD + DE + EF$$

$$BC - AB : BC :: EF - AB : BC + CD + DE + EF$$

COROLLAIRE I.

239 Puisqu'une Progression géométrique donne cette Proportion (N^o. 237.)

La différence des deux premiers termes

Est au premier terme,

Comme la différence du premier terme au dernier

Est à la somme de tous les termes qui précèdent le dernier ;

Et que (N^o. 197.) le quatrième terme d'une Proportion géométrique est égal au produit du second & du troisième divisé par le premier ; il est clair qu'on aura la somme de tous les termes qui précèdent le dernier dans une Progression géométrique, en multipliant le premier terme par la différence du premier terme au dernier, & en divisant le produit par la différence des deux premiers termes.

Par exemple, si l'on a cette Progression géométrique

$$\therefore AB : BC : CD : DE : EF :$$

on trouvera que la somme $AB + BC + CD + DE$ des termes qui précèdent le dernier, est égale à $\frac{AB \times (AB - EF)}{AB - BC}$.

Donc la somme de tous les termes d'une Progression géométrique $\therefore AB : BC : CD : DE : EF :$ sera $\frac{AB \times (AB - EF)}{AB - BC} + EF$.

COROLLAIRE II.

240 La quantité $\frac{AB \times (AB - EF)}{AB - BC} + EF$, qui exprime la somme de tous les termes d'une Progression dont le premier terme est AB , le second BC , & dont le dernier est EF , peut être écrite sous cette forme

$$\frac{AB}{AB - BC} \times (AB - EF) + EF.$$

Divisant par BC le numérateur & le dénominateur de la Fraction $\frac{AB}{AB-BC}$, ce qui (N°. 192.) ne changera point le Rapport de AB à $AB-BC$ exprimé par la Fraction $\frac{AB}{AB-BC}$, la dernière quantité qui exprime la somme de tous les termes d'une Progression géométrique prendra cette forme

$$\frac{\left(\frac{AB}{BC}\right)}{\left(\frac{AB}{BC}\right) - \left(\frac{BC}{BC}\right)} \times (AB - EF) + EF.$$

$$\text{ou } \frac{\left(\frac{AB}{BC}\right)}{\left(\frac{AB}{BC}\right) - 1} \times (AB - EF) + EF; \text{ parce que}$$

$$\frac{BC}{BC} = 1, \text{ \& par conséquent } \frac{-BC}{BC} = -1.$$

Or $\frac{AB}{BC}$ est le Rapport du premier terme au second; c'est-à-dire, la Raison qui regne dans la Progression; & $\frac{AB}{BC} - 1$ est un nombre plus petit d'une unité que la Raison de la Progression.

$$\text{Donc } \frac{\left(\frac{AB}{BC}\right)}{\left(\frac{AB}{BC}\right) - 1} \times (AB - EF) + EF, \text{ qui ex-}$$

prime la somme de tous les termes d'une Progression; signifie que pour avoir cette somme, il faut diviser la Raison de la Progression par un nombre plus petit qu'elle d'une unité; multiplier le Quotient de la Division par la différence du premier terme au dernier; & ajouter le dernier terme au produit de cette multiplication.

Cette Proposition a déjà été démontrée dans l'Arithmétique, N°. 199.

COROLLAIRE III.

241 Si la Progression géométrique est décroissante & continuée à l'infini, son dernier terme sera infiniment petit, & ne sera par conséquent point comparable aux deux premiers termes; en sorte que le premier terme pourra être pris pour la différence du premier terme au dernier, & que la somme de tous les termes qui précèdent le dernier pourra aussi être prise pour la somme de tous les termes.

Dans ce cas, la Proportion qu'on vient de démontrer pour les Progressions, savoir,

La différence des deux premiers termes

Est au premier terme,

Comme la différence du premier terme au dernier

Est à la somme de tous les termes qui précèdent le dernier ;

se changera en celle-ci :

La différence des deux premiers termes

Est au premier terme,

Comme le premier terme

Est à la somme de tous les termes de la Progression décroissante poussée jusqu'à l'infini.

Il suit de là (N^o. 197.) qu'on trouvera la somme de tous les termes d'une Progression décroissante à l'infini, dont on connoitra seulement les deux premiers termes, en divisant le Quarré du premier terme par la différence du premier terme au second.

Par exemple, si AB , BC , sont les deux premiers termes d'une Progression géométrique décroissante à l'infini, la somme du nombre infini de termes qu'elle contiendra sera exprimée par $\frac{AB \times AB}{AB - BC}$.

COROLLAIRE IV.

COROLLAIRE IV.

242 La Quantité $\frac{AB \times AB}{AB - BC}$, qui exprime la somme de tous les termes d'une Progression décroissante à l'infini, peut être écrite sous cette forme $\frac{AB}{AB - BC} \times AB$.

Divisant par BC le numérateur & le dénominateur de la Fraction ou du Rapport $\frac{AB}{AB - BC}$, la dernière quantité qui représente la somme de tous les termes d'une Progression décroissante à l'infini, prendra cette forme

$\frac{\left(\frac{AB}{BC}\right)}{\left(\frac{AB}{BC}\right) - 1} \times AB$, comme on l'a fait voir (N^o. 240.).

Or $\frac{\left(\frac{AB}{BC}\right)}{\left(\frac{AB}{BC}\right) - 1}$ est le Quotient de la Raison de la

Progression divisée par un nombre plus petit qu'elle d'une unité.

Donc on aura la somme de tous les termes d'une Progression géométrique décroissante à l'infini, en divisant la Raison de la Progression par un nombre plus petit qu'elle d'une unité, & en multipliant le Quotient de cette Division par le premier terme de la Progression.

Cette Proposition a déjà été démontrée dans l'Arithmétique (N^o. 196.).

REMARQUE.

La formule $\frac{\left(\frac{AB}{BC}\right)}{\left(\frac{AB}{BC}\right) - 1} \times (AB - EF) + EF$,

qu'on trouve dans le Corollaire second, pour sommer une Progression géométrique dont les deux premiers termes sont AB & BC , ou dont la Raison est $\frac{AB}{BC}$.

Géom.

M *

178 Liv. III. REGLES DES PROPORTIONS.

& dont le dernier terme est EF , peut être écrite sous

cette forme
$$\frac{\left(\frac{AB}{BC}\right)}{\left(\frac{AB}{BC}\right) - 1} \times AB - \frac{\left(\frac{AB}{BC}\right)}{\left(\frac{AB}{BC}\right) - 1} \times EF + EF.$$

En examinant cette expression, l'on découvre que

1^o. La 1^{re}. partie $\frac{\left(\frac{AB}{BC}\right)}{\left(\frac{AB}{BC}\right) - 1} \times AB$ représente la

somme de tous les termes d'une Progression poussée à l'infini, dont le 1^{er}. terme est AB & la Raison $\frac{AB}{BC}$.

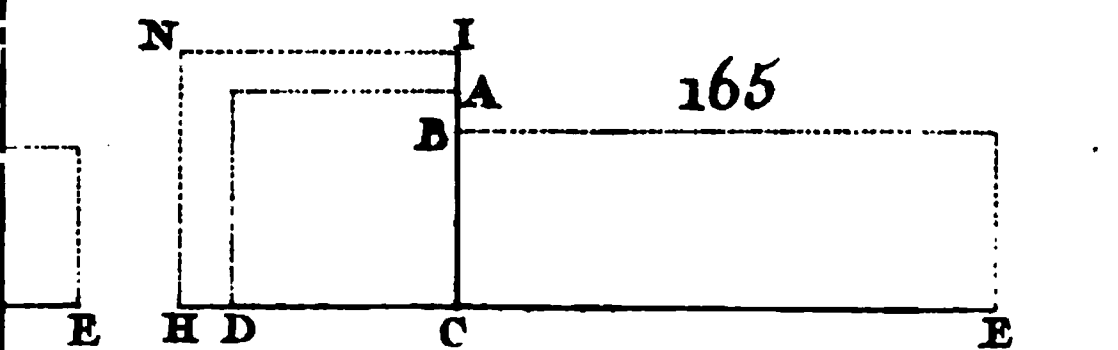
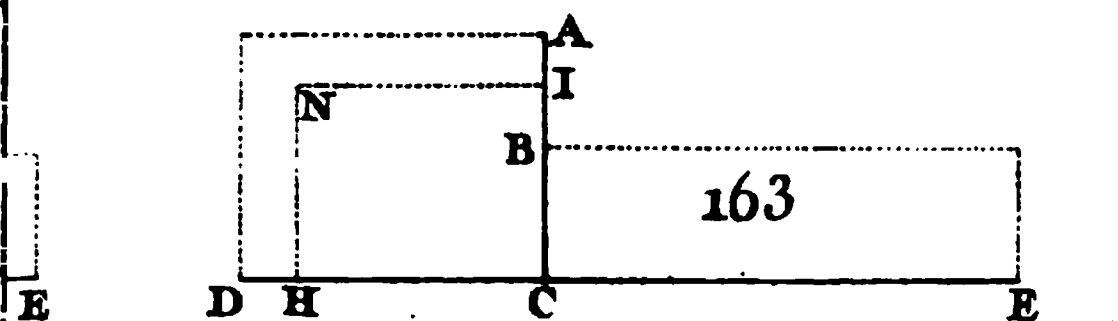
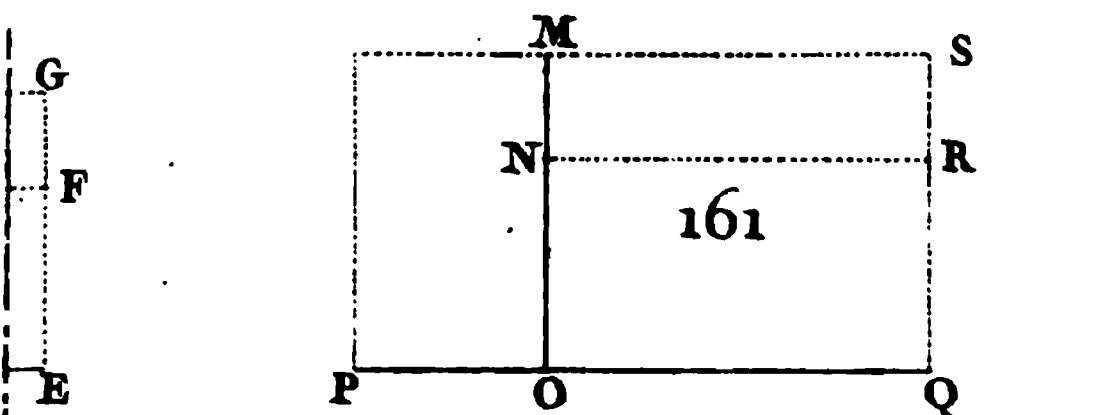
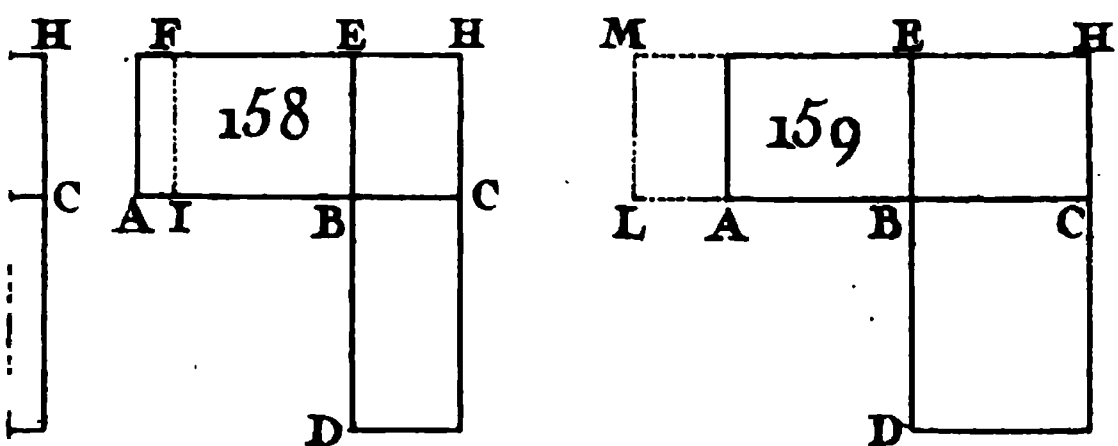
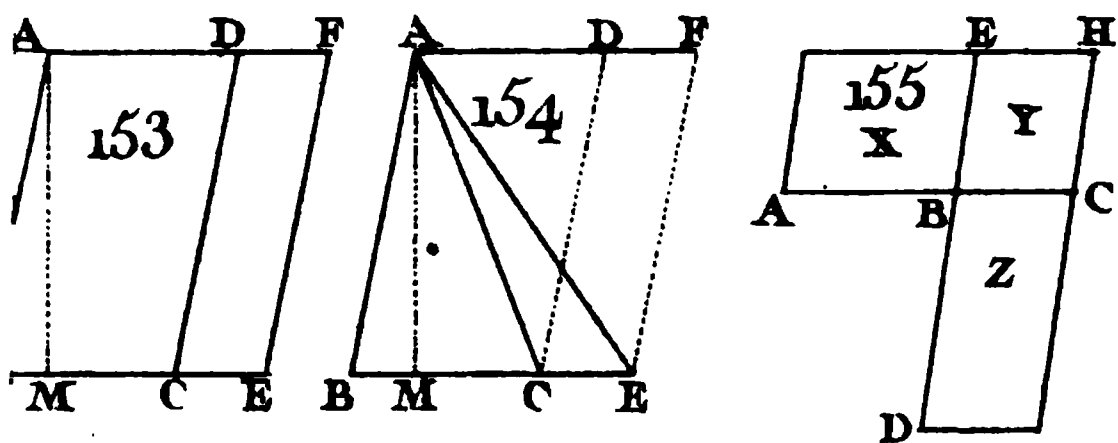
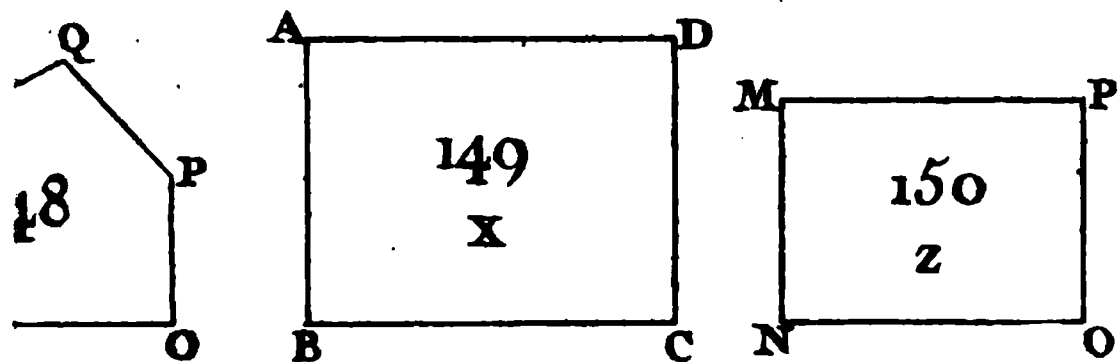
2^o. La 2^e. partie $\frac{\left(\frac{AB}{BC}\right)}{\left(\frac{AB}{BC}\right) - 1} \times EF$ représente la

somme de tous les termes d'une Progression poussée à l'infini, dont le 1^{er}. terme est EF & la Raison $\frac{AB}{BC}$.

Ainsi $\frac{\left(\frac{AB}{BC}\right)}{\left(\frac{AB}{BC}\right) - 1} \times AB - \frac{\left(\frac{AB}{BC}\right)}{\left(\frac{AB}{BC}\right) - 1} \times EF$ repré-

sente la différence de deux Progressions poussées à l'infini, dont la Raison est $\frac{AB}{BC}$ & les premiers termes AB & EF . Donc cette expression est la somme de tous les termes qui précèdent le dernier dans une Progression, dont les deux premiers termes sont AB, BC , & le dernier EF : en sorte que la sommation d'un nombre fini de termes d'une même Progression contient formellement les sommes de deux Progressions poussées à l'infini, dont l'une est soustraite de l'autre.

3^o. Comme la somme des termes de la Progression infinie soustraite contient le dernier des termes de la Progression finie qui fait partie de l'autre Progression infinie, la troisième partie $+ EF$ qui se trouve dans l'expression de la somme des termes de la Progression finie, rétablit ce qu'on ôte de trop en ôtant la seconde Progression infinie de la première.



ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE THÉORIQUE ET PRATIQUE.



LIVRE IV.

*Des Figures semblables & des Lignes
proportionnelles dont elles sont
composées.*

DÉFINITIONS.

1°. Fig. 166
& 167.
243 | Deux Figures *ABCDE, MNOPQ*,
d'un même nombre de côtés, sont
nommées semblables, lorsqu'elles
ont tous les Angles égaux chacun
à chacun, & tous les côtés direc-
tement proportionnels autour des mêmes Angles ;
c'est-à-dire, si les Angles *A, B, C, D, E*, sont égaux
aux Angles *M, N, O, P, Q*, chacun à chacun, & si
AB:BC:CD:DE:EA::MN:NO:OP:PQ:QM
ou *AB:MN::BC:NO::CD:OP::DE:PQ::EA:QM*,

2°. Les côtés adjacens aux Angles égaux de deux Figures semblables, s'appellent *Côtés homologues* ou *Côtés correspondans*. Ainsi AB , MN , sont deux côtés homologues.

Avertissement.

244 Lorsque plusieurs Figures seront semblables, dans quelque situation qu'elles puissent être, on les nommera de façon que les lettres qui désigneront les Angles égaux, tiendront les mêmes lieux dans les nominations de ces Figures; en sorte que les lettres qui désigneront les côtés homologues qu'on pourra comparer, y tiendront aussi le même lieu.

Fig. 166 & 167. Par exemple, lorsqu'on dira que deux Polygones $ABCDE$, $MNOPQ$, sont semblables, on entendra que l'Angle $A=M$, l'Angle $B=N$, l'Angle $C=O$, l'Angle $D=P$, &c.; & que les côtés AB , BC , CD , DE , EA , du Polygone $ABCDE$, sont homologues aux côtés MN , NO , OP , PQ , QM , qui tiennent les mêmes lieux dans la nomination du Polygone $MNOPQ$.

Fig. 176 & 177. Lorsque deux Triangles, tels que ABC , PQR , seront semblables, & qu'on aura l'Angle $A=P$, l'Angle $B=Q$, l'Angle $C=R$, on les désignera par ABC , PQR , ou BAC , QPR , ou ACB , PRQ , ou enfin de telle autre manière qu'on voudra, pourvu que les lettres qui désigneront les Angles égaux tiennent les mêmes lieux dans les nominations: mais jamais on ne les nommera ABC , QPR , ni ACB , PQR ; parce que dans ces nominations, les lettres qui appartiennent aux sommets des Angles égaux, ne tiennent pas les mêmes lieux.

Cette attention de nommer les Polygones semblables & les Triangles semblables, de manière que les lettres qui désignent les Angles égaux tiennent les

ET DES LIGNES PROPORTIONNELLES. 181
 mêmes lieux, est très utile pour reconnoître les côtés correspondans que l'on doit comparer ensemble lorsqu'on a des Proportions à faire.

Par exemple, si deux Triangles semblables ABC , PQR , sont nommés de maniere que les lettres des Angles égaux tiennent les mêmes lieux, il sera aisé de voir que le côté AB , désigné par les deux premieres lettres de ABC , doit être comparé avec le côté PQ désigné par les deux premieres lettres de PQR ; que le côté BC , désigné par les deux dernieres lettres de ABC , le doit être avec le côté QR désigné par les deux dernieres lettres de PQR ; & qu'enfin le côté AC , désigné par les lettres extrêmes de ABC , doit être comparé avec le côté PR marqué par les lettres extrêmes de PQR ; en sorte que pour désigner que les deux Triangles semblables ABC , PQR , ont les côtés proportionnels, on écrira

$$AB:BC:AC::PQ:QR:PR.$$

CHAPITRE PREMIER.

Des Lignes coupées proportionnellement, des Triangles semblables, & des Lignes qui concourent en un même Point.

THEOREME.

245 **S**I l'on coupe un Triangle BAC par une Droite MN parallèle à un côté BC , les deux autres côtés AB , AC , seront coupés proportionnellement; c'est-à-dire, qu'on aura $AB:AM::AC:AN$. Fig. 168.

DÉMONSTRATION.

Soient tirées les Droites MC , NB : les Triangles
 M iij

BMN , CMN , seront égaux; car ils auront même base MN , & seront compris entre mêmes Parallèles MN , BC . Ajoutant à chacun le Triangle MAN , on aura le Triangle $BNA = CMA$. Mais ces Triangles égaux ont un Angle égal ou commun en A . Donc (N°. 200.) ils ont les côtés réciproques, c'est-à-dire, que

$$AB : AM :: AC : AN.$$

Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Fig. 168. 246 Donc si un Triangle BAC est coupé par une Droite MN parallele à un côté BC , l'on aura

$$AB : AM : MB :: AC : AN : NC.$$

Car suivant le Théorème

$$AB : AM :: AC : AN.$$

Ainsi l'on aura *Convertendo* (N°. 222.)

$$AB : AB - AM :: AC : AC - AN,$$

c'est-à-dire, $AB : MB :: AC : NC$.

Changeant encore cette nouvelle Proportion *Dividendo* (N°. 220.), l'on aura

$$AB - MB : MB :: AC - NC : NC,$$

c'est-à-dire, $AM : MB :: AN : NC$.

Enfin alternant la premiere & la troisième Proportion, l'on aura (N°. 206.)

$$AB : AC :: AM : AN$$

$$AM : AN :: MB : NC.$$

Mettant les Antécédens de ces Rapports égaux dans une Suite, & leurs Conséquens dans une autre Suite, on aura

$$AB : AM : MB :: AC : AN : NC,$$

COROLLAIRE II.

247 Si le Triangle BAC est coupé par deux Droites MN , PQ , parallèles à l'un BC de ses côtés, les deux autres côtés AB , AC , seront divisés proportionnellement, & l'on aura

$$AB : AM : MB : AP : PB : PM :: AC : AN : NC : AQ : QC : QN.$$

Car puisque MN est parallèle à BC , on aura (N^o. 246.)

$$AB : AM : MB :: AC : AN : NC,$$

c'est-à-dire, $AB : AC :: AM : AN :: MB : NC$.

Et puisque PQ est aussi parallèle à BC , on aura encore (N^o. 246.)

$$AB : AP : PB :: AC : AQ : QC,$$

c'est-à-dire, $AB : AC :: AP : AQ :: PB : QC$.

Et comme tous les Rapports qu'on vient de trouver sont égaux à celui de AB à AC , on aura $AM : AN :: AP : AQ$.

Mais (N^o. 224.) $AM : AN :: AM - AP : AN - AQ$, c'est-à-dire, $AM : AN :: PM : QN$.

Ainsi puisque le Rapport de AM à AN est déjà dans la liste des Rapports égaux à celui de AB à AC , celui PM à QN peut aussi être placé dans la liste de ces Rapports. On aura donc

$$AB : AC :: AM : AN :: MB : NC :: AP : AQ :: PB : QC :: PM : QN,$$

$$\text{ou } AB : AM : MB : AP : PB : PM :: AC : AN : NC : AQ : QC : QN.$$

Si le Triangle BAC étoit coupé par une troisième ou une quatrième Ligne &c parallèle à sa base, on démontreroit de la même manière que les parties correspondantes des deux Lignes coupées seroient proportionnelles.

COROLLAIRE III.

Fig. 170. 248 Une Droite AD qui divisera en deux parties égales un Angle BAC , partagera le côté BC opposé à cet Angle, en parties BD, DC , proportionnelles aux côtés AB, AC , du même Angle; c'est-à-dire, que l'on aura $BD:DC::AB:AC$.

Car si l'on prolonge AC d'une quantité $AE=AB$, & qu'on tire BE , l'on aura un Triangle isoscele BAE , dont les Angles E & ABE à la base seront égaux (N^o. 111.): & comme la somme de ces deux Angles intérieurs est égale à l'Angle extérieur BAC (N^o. 109.), chacun d'eux sera égal à la moitié de l'Angle BAC qu'on suppose divisé en deux parties égales par AD . On aura donc l'Angle $E=DAC$. Ainsi AD sera parallèle à EB (N^o. 47.); & par conséquent on aura (N^o 246.)

$$BD:DC::AE:AC,$$

ou (parce qu'on a fait $AE=AB$)

$$BD:DC::AB:AC.$$

SCHOLIE.

Fig. 169. 249 1^o. Ce Théorème & ses Corollaires fournissent une pratique aisée pour diviser une Droite donnée AC , en parties proportionnelles à celles AP, PM, MB , d'une autre Ligne droite AB .

Car si l'on fait faire aux deux Droites AB, AC , un Angle quelconque BAC , dont le sommet A soit à l'extrémité commune de ces deux Lignes; & qu'ayant tiré par les deux autres extrémités une Droite BC , on lui mene par les Points de Division P, M , de la Droite AB , des Paralleles PQ, MN ; ces Paralleles diviseront la Droite AC en parties pro-

the
po
ed
in
12
ce
on
es
10
i
de
6
e

COUPÉES PROPORTIONNELLEMENT. 185
 proportionnelles à celles de la Droite AB (N^o. 247.) :
 c'est-à-dire , que l'on aura

$$AB : AM : MB : AP : PB : PM :: AC : AN : NC : AQ : QC : QN ;$$

& par conséquent

$$AP : PM : MB :: AQ : QN : NC.$$

2^o. On déduit aussi du même Théorème la manière de diviser une Droite AC , en autant de parties égales que l'on veut. Car si par l'extrémité A de la Droite AC , l'on mene une Droite indéfinie AB ; & qu'ayant pris sur elle, à commencer du Point A , autant de parties égales AP , PM , MB , de grandeur quelconque, que l'on veut de parties égales dans AC , l'on tire la Droite BC , & qu'on lui mene par les Points de division P , M , de la Droite AB , des Paralleles PQ , MN ; ces Paralleles diviseront la Droite AC en autant de parties égales qu'il y en a dans la Droite AB , & par conséquent en autant de parties égales qu'on en vouloit; puisqu'on aura

$$AP : PM : MB :: AQ : QN : NC,$$

& que les parties AP , PM , MB , de la Droite AB , étant égales entr'elles (*Construction*), les parties AQ , QN , NC , de la Droite AC , seront aussi égales entr'elles.

3^o. On déduira aussi de ce Théorème une pratique pour trouver une quatrième proportionnelle à trois Lignes données ab , am , ac . Pour cela, on fera un Angle quelconque XAZ : puis ayant pris sur un côté AX , à commencer du Sommet A , deux parties AB , AM , égales aux deux premières proportionnelles ab , am , & ayant pris sur le second côté AZ , une partie AC égale à la troisième proportionnelle ac ,

Fig. 171
& 172.

on tirera par les extrémités B, C , des Antécédens; c'est-à-dire, de la première & de la troisième proportionnelles, une Droite BC ; & par le Point M on mènera à cette Droite BC une Parallele MN , qui coupera nécessairement dans le côté AZ une partie AN , égale à la quatrième proportionnelle qu'on demande; puisque (N^o. 245.) on aura

$$AB : AM :: AC : AN,$$

& par conséquent $ab : am :: ac : AN$.

On peut faire quelque changement à la dernière construction, & déterminer une quatrième proportionnelle à trois Lignes données am, mb, an , comme il suit.

Fig. 172. On fera un Angle quelconque XAZ : puis ayant
& 173. pris sur un côté AX deux parties de suite AM, MB , égales aux deux premières proportionnelles am, mb , & sur le second côté AZ une partie AN égale à la troisième proportionnelle an , on tirera par les extrémités de la première & de la troisième proportionnelles transportées sur les côtés de l'Angle, une Droite MN ; & lui ayant mené par le Point B une Parallele BC , la partie NC du côté AZ , comprise entre ces deux Paralleles, sera la quatrième proportionnelle demandée. Car (N^o. 246.) on aura

$$AM : MB :: AN : NC,$$

& par conséquent $am : mb :: an : NC$.

4^o. La méthode pour trouver une troisième proportionnelle à deux Lignes données, est parfaitement semblable à celles qu'on vient d'expliquer pour trouver une quatrième proportionnelle à trois Lignes. Car une troisième proportionnelle à deux Lignes données AB, AM , est une quatrième proportionnelle à trois Lignes AB, AM, AM ; dont la troisième est égale à la seconde.

T H É O R È M E.

250 Si les côtés AB , AC , d'un Triangle BAC , Fig. 168, sont coupés proportionnellement, c'est-à-dire, de manière que l'on ait $AB : AM :: AC : AN$, la Sécante MN sera parallèle à la base BC .

D É M O N S T R A T I O N.

Soient tirées les Droites NB , MC : les Triangles BNA , CMA , seront égaux (N^o. 195.); car ils auront un Angle commun ou égal en A : & puisque $AB : AM :: AC : AN$, ils auront les côtés réciproques autour de leur Angle égal.

Otant de chacun le Triangle MAN , on aura le Triangle $BMN = CMN$.

Mais ces Triangles égaux ont même base MN .

Donc (N^o. 139.) les Droites MN , BC , entre lesquelles ils sont situés, sont parallèles. Ce qu'il falloit démontrer.

C O R O L L A I R E I.

251 Puisque la Droite MN qui coupe un Triangle BAC est parallèle à sa base BC , lorsqu'on a

$$AB : AM :: AC : AN;$$

Fig. 168.

1^o. Lorsqu'on aura *Invertendo*

$$AM : AB :: AN : AC,$$

Il est visible que la même Sécante MN sera aussi parallèle à la base BC .

2^o. La même Sécante sera encore parallèle à la base BC , lorsqu'on aura

$$MB : AM :: NC : AN;$$

puisque alors on aura *Componendo* (N^o. 210.)

$$MB + AM : AM :: NC + AN : AN,$$

c'est-à-dire, $AB : AM :: AC : AN$, comme dans l'hypothèse du Théorème.

3°. Enfin la même Sécante sera parallèle à la base BC , lorsqu'on aura

$$AB : MB :: AC : NC.$$

Car alors on aura *Convertendo* (N°. 222.)

$$AB : AB - MB :: AC : AC - NC,$$

c'est-à-dire, $AB : AM :: AC : AN$, de même que dans l'hypothèse du Théorème.

COROLLAIRE II.

Fig. 174. 252 Donc si l'on coupe les quatre côtés d'un
ou 175. Quadrilatere $ABDC$ aux Points M, N, P, Q ,
de manière que l'on ait

$$AB : AC : DB : DC :: AM : AN : DP : DQ,$$

les quatre Lignes qui joindront ces quatre Points formeront un Parallélogramme $MPQN$.

Pour le démontrer, soient tirées les deux Diagonales AD, BC .

1°. Dans le Triangle BAC ,

Puisque $AB : AM :: AC : AN$,

MN sera parallèle à BC (N°. 250.) :

Et comme dans le Triangle BDC ,

$DB : DP :: DC : DQ$,

PQ sera aussi parallèle à BC .

Ainsi MN, PQ , seront parallèles.

2°. Dans le Triangle ABD ,

Puisque $AB : AM :: DB : DP$,

MP sera parallèle à AD (N°. 251.) :

Et comme dans le Triangle ACD ,

$AC : AN :: DC : DQ$,

NQ sera aussi parallèle à AD .

Ainsi MP, NQ , seront parallèles.

Donc les côtés opposés du Quadrilatere $MPQN$ seront parallèles ; & (N°. 124.) ce Quadrilatere sera par conséquent un Parallélogramme.

T H É O R È M E.

253 Deux Triangles BAC , CMN , sont semblables, Fig. 1784
 quand ils ont les Angles égaux chacun à chacun ; c'est-à-dire, si l'Angle $BAC = CMN$, l'Angle $ACB = MNC$,
 & par conséquent l'Angle $ABC = MCN$.

D É M O N S T R A T I O N.

Soient disposés les Triangles de maniere que leurs côtés homologues BC , CN , soient en Ligne droite, & soient prolongés les côtés BA , NM , jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un Point O .

Les Droites AC , ON , seront paralleles (N^o. 47.) ;
 car l'Angle $ACB = MNC$ (hyp.).

Les Droites OB , MC , seront aussi paralleles (N^o. 47.) ; puisque l'Angle $ABC = MCN$ (hyp.).

Donc (N^o. 124.) OC fera un Parallélogramme, & aura par conséquent les côtés opposés égaux (N^o. 129.).

Mais AC étant parallele à ON , on aura (N^o. 247.)

$$BA : AO :: BC : CN ;$$

Et MC étant parallele à OB , on aura aussi

$$BC : CN :: OM : MN.$$

Donc en mettant CM pour AO , & AC pour OM dans ces deux Proportions, on aura

$$BA : CM :: BC : CN :: AC : MN,$$

$$\text{ou } BA : BC : AC :: CM : CN : MN.$$

Donc les Triangles BAC , CMN , qui ont les Angles égaux, ont aussi les côtés proportionnels autour des mêmes Angles, & sont par conséquent semblables (N^o. 243.). Ce qu'il falloit démontrer.

254 Comme deux Triangles ne peuvent point avoir deux Angles égaux chacun à chacun, sans que tous leurs

Angles soient égaux chacun à chacun ; & que d'ailleurs on n'a employé que deux Angles égaux chacun à chacun pour démontrer que les Triangles ont les côtés proportionnels ;

1°. Lorsque nous voudrons prouver dans la suite que deux Triangles sont semblables , nous nous contenterons de faire voir qu'ils ont deux Angles égaux chacun à chacun.

2°. Lorsque nous voudrons faire sur une Ligne donnée un Triangle semblable à un Triangle donné , nous nous contenterons de faire avec la Ligne donnée deux Angles égaux à deux Angles du Triangle donné.

C O R O L L A I R E I.

*Fig. 179 255 1°. On peut conclure de ce Théorème que
* 180. deux Triangles isosceles BAC , QPR , sont sembla-*
bles , quand ils ont un Angle égal à la base.

Car deux Triangles isosceles ne peuvent point avoir un Angle égal à la base , sans avoir les deux Angles à la base égaux chacun à chacun. Ainsi ils sont semblables.

2°. Deux Triangles isosceles BAC , QPR , sont semblables , lorsqu'ils ont un Angle égal entre leurs côtés égaux.

Car si les Angles A & P des sommets des deux Triangles isosceles BAC , QPR , sont égaux , la somme des deux Angles B & C qui sont à la base du premier , fera égale à la somme des deux Angles Q & R qui sont à la base du second ; & par conséquent la moitié de la somme des deux Angles B & C sera égale à la moitié de la somme des deux Angles Q & R .

Mais les deux Triangles BAC , QPR , étant isosceles , les deux Angles B & C sont égaux , & les deux Angles Q & R sont pareillement égaux (N°. 113.).

Ainsi l'Angle B est la moitié de la somme des deux Angles B & C ; & l'Angle Q est la moitié de la somme des deux Angles Q & R .

Donc les Angles B & Q , qui sont aux bases des deux Triangles isosceles BAC , QPR , sont égaux. Ainsi on conclurra, comme dans la premiere partie de ce Corollaire, que ces deux Triangles isosceles sont semblables.

COROLLAIRE II.

256 Donc deux Triangles ABC , PQR , sont semblables, quand ils ont les côtés parallèles chacun à chacun; car ils ne peuvent pas avoir les côtés ainsi parallèles, sans avoir les Angles égaux chacun à chacun. Fig. 176 & 177.

Nous ne parlons ici que des Triangles qui sont dans un même Plan; mais dans la suite nous ferons voir que deux Triangles qui ont les côtés parallèles, sont semblables, lors même qu'ils sont dans différens Plans.

COROLLAIRE III.

257 Donc deux Triangles ABC , PQR , sont semblables, quand les côtés de l'un sont perpendiculaires aux côtés de l'autre chacun à chacun. Car si l'on fait faire un quart de révolution au Triangle PQR , dans le Plan où il est, il est clair que les côtés de ce Triangle, qui sont (*hyp.*) perpendiculaires sur ceux du Triangle ABC , deviendront parallèles aux mêmes côtés du Triangle ABC ; & l'on verra alors que ces deux Triangles ont les Angles égaux, & que par conséquent ils sont semblables. Fig. 184.

On peut encore démontrer comme il suit, que les deux Triangles ABC , PQR , sont semblables.

Soit prolongé PQ jusqu'au côté AB , & BC jusqu'au côté QR .

1^o. Le Quadrilatere $ADPE$ aura deux Angles droits en D, E : & comme les quatre Angles de ce Quadrilatere valent ensemble quatre droits (N^o. 123.), les deux autres $A + DPE$ vaudront ensemble deux droits. Mais $QPR + DPE$ valent aussi ensemble deux droits (N^o. 21.). Donc l'Angle $A = QPR$.

2^o. Le Quadrilatere $ECFR$ aura deux Angles droits en E, F : & comme les quatre Angles de ce Quadrilatere valent ensemble quatre droits (N^o. 123.), les deux autres $R + ECF$ vaudront ensemble deux droits. Mais $ACB + ECF$ valent ensemble deux droits (N^o. 21.). Donc l'Angle $ACB = R$.

Ainsi les Triangles ABC, PQR , ont deux Angles égaux chacun à chacun, & sont par conséquent semblables.

On doit remarquer ici que si deux Triangles semblables ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun, les côtés de l'un seront homologues à ceux de l'autre sur lesquels ils seront perpendiculaires.

S C H O L I E.

Fig. 185
& 186.

258 Ce Théorème conduit à une pratique pour trouver une quatrième proportionnelle à trois Lignes données am, ab, mn .

On tirera une Droite AX , sur laquelle, à commencer du point fixe A , on prendra AM égale à la première proportionnelle am , & AB égale à la seconde proportionnelle ab . Puis par l'extrémité M de la première proportionnelle, on tirera suivant une direction quelconque une Droite MN , égale à la troisième proportionnelle mn ; & après avoir mené la Droite indéfinie ANZ , on tirera par le point B , & parallèlement à MN , une Droite BC , qui étant terminée par les deux côtés de l'Angle XAZ , fera la quatrième proportionnelle demandée.

Car

Car par cette construction l'on fait deux Triangles MAN , BAC , qui ont un Angle commun en A , & un Angle $AMN = ABC$, à cause des Paralleles MN , BC . Ainsi ces Triangles sont semblables, & donnent par conséquent

$$AM : AB :: MN : BC,$$

c'est-à-dire, $am : ab :: mn : bc$.

THEOREME.

259 Deux Triangles BAC , MAN , sont semblables, quand ils ont un Angle égal entre deux côtés proportionnels. Fig. 166

DÉMONSTRATION.

Deux Triangles qui ont un Angle égal peuvent être représentés par les Triangles BAC , MAN , qui ont un Angle A commun. Or comme (*hyp.*) les deux côtés qui renferment l'Angle égal sont proportionnels, on a $AB : AM :: AC : AN$. Ainsi (*Nº. 250.*) la Droite MN est parallele à la base BC ; & par conséquent les trois Angles du Triangle MAN sont égaux aux trois Angles du Triangle BAC : d'où il suit (*Nº. 253.*) que les deux Triangles BAC , MAN , sont semblables. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

260 Si sur les côtés égaux AB , AC , d'un Triangle isoscele ou équilatéral BAC , prolongés s'il est nécessaire, on prend, à commencer du sommet A , deux parties égales AM , AN , on aura

$$AB : AM :: AC : AN;$$

& si l'on tire la Droite MN , les deux Triangles BAC , MAN , auront un Angle égal ou commun A entre côtés proportionnels, & seront par conséquent sembla-

Géom.

N*.

Fig. 179
& 181, ou
182 & 182.

bles (N^o. 259.); d'où il suit que si le Triangle BAC est équilatéral, le Triangle MAN sera aussi équilatéral.

Si sur les mêmes côtés égaux AB, AC , d'un Triangle isoscele ou équilatéral BAC , l'on eût pris, à commencer de la base, des parties égales BM, CN , il est évident qu'on auroit eu aussi $AM=AN$: d'où il suit que les Triangles BAC, MAN , auroient été semblables, & que le Triangle MAN auroit été équilatéral, si le Triangle BAC l'avoit été.

Il est naturel de conclurre de ce Corollaire que deux Triangles isosceles BAC, MAN , sont semblables, lorsque leurs côtés égaux contiennent le même Angle ou un Angle égal.

Cette dernière conséquence a déjà été démontrée au N^o. 255.

TH É O R È M E.

Fig. 187 & 188. 261 Deux Triangles ABC, PQR , sont semblables, quand ils ont les trois côtés proportionnels, c'est-à-dire,
Si $AB:AC:BC::PQ:PR:QR$,
ou Si $AB:PQ::AC:PR::BC:QR$.

D É M O N S T R A T I O N.

Soient prolongés deux côtés PQ, PR , du plus petit Triangle, jusqu'à ce qu'ils deviennent égaux à leurs homologues AB, AC ; c'est-à-dire, soit fait $PM=AB, PN=AC$, & soit tirée la Droite MN .

1^o. Puisque (hyp.) $AB:PQ::AC:PR$, on aura $PM:PQ::PN:PR$. Ainsi les deux Triangles PQR, PMN , seront semblables (N^o. 259.).

2^o. (Hyp.) $BC:QR::AB:PQ$, ou $::PM:PQ$; & à cause des Triangles semblables PMN, PQR ,
 $PM:PQ::MN:QR$.

Ainsi $BC:QR::MN:QR$, & par conséquent $BC=MN$.

Mais (Construction) $AB = PM$, $AC = PN$.

Donc les deux Triangles ABC , PMN , sont parfaitement égaux (N°. 118.) : & comme on vient de démontrer que l'un PMN de ces deux Triangles égaux est semblable au Triangle PQR , il est clair que l'autre Triangle ABC est aussi semblable au même Triangle PQR . Ce qu'il falloit démontrer.

THEOREME.

262 Si des extrémités B , E , & de différents Points C , D , d'une même Droite BE , on tire par un même Point A des Droites indéfinies AB , AC , AD , AE ; toute Droite comme MP , parallèle à BE , qui se trouvera coupée par ces lignes AB , AC , AD , AE , sera divisée en parties proportionnelles à celles de la Droite BE ; c'est-à-dire, qu'on aura

Fig. 189
ou 190.

$$BC : CD : DE :: MN : NO : OP.$$

DÉMONSTRATION.

Les Triangles $\left\{ \begin{array}{l} BAC, MAN \\ CAD, NAO \\ DAE, OAP \end{array} \right\}$ qui sont semblables deux à deux, donneront $\left\{ \begin{array}{l} BC : MN :: AC : AN \\ AC : AN :: CD : NO \\ \text{ou } 1 : AD : AO \\ AD : AO :: DE : OP. \end{array} \right.$

Et en ne prenant de ces Rapports égaux que ceux dont on a besoin, & dont les termes sont des parties de BE & de MP , on aura

$$BC : MN :: CD : NO :: DE : OP,$$

ou $BC : CD : DE :: MN : NO : OP.$

Ce qu'il falloit démontrer.

263 On voit par ce Théorème que pour diviser une Ligne droite MP , en parties proportionnelles à celles BC , CD , DE , d'une Droite BE , l'on peut placer la

Fig. 187
ou 188.

Droite MP parallèlement à BE ; puis mener par les extrémités $B, M, \& E, P$, de ces deux Lignes, des Droites BM, EP , qui se rencontrent en un Point A ; ensuite tirer par ce Point de rencontre A , & par les Points de division de la Ligne BE , des Droites CN, DO , qui couperont nécessairement la Droite MD en parties MN, NO, OP , proportionnelles à celles BC, CD, DE , de la Droite BE .

Fig. 191. Lorsqu'on aura plusieurs Lignes droites données de différentes grandeurs à diviser en parties proportionnelles à celles BC, CD, DE , d'une Droite BE ; au lieu de faire pour chaque Ligne à diviser une opération semblable à celle qu'on vient d'expliquer, ce qui deviendrait trop long, on décrira sur la Droite BE , actuellement divisée, un Triangle équilatéral BAE ; & du sommet A de l'Angle opposé à BE , l'on tirera par tous les Points de division $C, D, \&c.$ de ce côté BE , des Droites $CA, DA, \&c.$, qu'on prolongera, s'il est nécessaire, indéfiniment au-delà de BE . Ensuite on prendra sur les côtés AB, AE , prolongés s'il est nécessaire, deux parties AM, AP , ou Am, Ap , égales à la Ligne quelconque qu'on veut diviser en parties proportionnelles à celles de BE ; puis on tirera la Droite MP , ou mp , qui sera nécessairement parallèle à BE , & qui sera par conséquent divisée en parties proportionnelles à celles de BE .

Comme les Triangles MAP, mAp , seront semblables au Triangle équilatéral BAE (N°. 260.), les Droites MP, mp , qu'on a divisées en parties proportionnelles à celles de BE , seront égales aux Droites AM, Am , qui (Construction) ont été faites égales aux Droites qu'on devoit diviser.

THÉORÈME.

264 Si de deux Points P, Q , d'une Droite PQ , partent deux Paralleles PO, QR , inégales, & deux autres Paralleles PM, QN , proportionnelles aux deux premières, c'est-à-dire, telles que l'on ait $PM:QN::PO:QR$; les deux Droites OR, MN , menées par les extrémités de ces Lignes qui sont paralleles deux à deux, étant prolongées, s'il est nécessaire, iront concourir en un même Point S avec la Droite PQ , aussi prolongée, s'il est nécessaire.

Fig. 192;
193, 194,
195, 196,
197, 198
& 199.

DÉMONSTRATION.

Si l'on suppose que la Droite OR rencontre la Droite PQ en S , & que MN la rencontre en T , il faudra démontrer que le Point S & le Point T se confondent, ou ne sont qu'un seul & même Point.

1°. Les Triangles MPT, NQT , seront semblables, & donneront

$$PT:QT::PM:QN.$$

2°. Par hyp. $PM:QN::PO:QR$.

3°. Les Triangles OPS, RQS , seront aussi semblables, & donneront $PO:QR::PS:QS$.

Donc on aura $PT:QT::PS:QS$.

Changeant cette Proportion *Dividendo*, l'on aura

$$PT-QT:QT::PS-QS:QS,$$

c'est-à-dire, $PQ:QT::PQ:QS$; & par conséquent $QT=QS$ (N°. 190.).

Ainsi le Point T & le Point S se confondront.

Changeant la même Proportion *Componendo*, on aura

$$PT+QT:QT::PS+QS:QS,$$

c'est-à-dire, $PQ:QT::PQ:QS$; & par conséquent $QT=QS$ (N°. 190.).

Ainsi le Point T & le Point S se confondront.

Niii

Fig. 192;
193, 194
& 195.

Fig. 196;
197, 198
& 199.

Donc enfin dans tous les cas les Points T , S , se confondront, ou ne seront qu'un seul & même Point. Ce qu'il falloit démontrer.

Le Théorème qu'on vient de démontrer conduit naturellement au Problème suivant.

P R O B L È M E.

Fig. 200, 201, 202 & 203, 265 Par un Point donné P , mener une Droite PQ qui aille au Point de concours de deux autres Droites AB , CD , lorsque ce Point de concours est trop éloigné pour être déterminé.

SOLUTION.

Après avoir tiré par le Point donné P une Droite POM qui rencontre les deux Lignes données AB , CD , en deux Points quelconques O , M , & après lui avoir mené par tel Point qu'on voudra, une Parallele QRN qui rencontre les mêmes Lignes données en deux Points R , N , sur la portion MO de la première Parallele, comprise entre les deux Lignes AB , CD , on fera un Triangle équilatéral MSO .

Puis ayant pris sur la seconde Parallele QRN , la longueur de la partie NR comprise entre les deux Lignes données, & l'ayant portée en Sn & Sr , sur les côtés SM , SN , du Triangle équilatéral, prolongés, s'il est nécessaire, on tirera la Droite nr ; ce qui donnera (N°. 260.) un Triangle équilatéral nSr , & par conséquent $nr = Sn$; & comme on a fait $Sn = NR$, on aura aussi $nr = NR$.

Ensuite par le Sommet S du Triangle équilatéral, & par le Point donné P , on mènera une Droite SP , qui prolongée, s'il est nécessaire, coupera en q la Droite nr , aussi prolongée, s'il est nécessaire.

Enfin ayant pris la longueur de qr , & l'ayant portée en QR sur QRN , on mènera par le Point Q ainsi déterminé, & par le Point donné P , une Droite PQ , qui sera nécessairement dirigée vers le Point de concours des deux Droites données AB, CD .

Car par cette construction l'on aura (*N^o. 262.*)

$$PM : PO :: qn : qr.$$

Mais on a fait $QR = qr$; & ces deux parties égales étant retranchées des deux Lignes NR, nr qu'on a trouvées égales, on aura $QN = qn$. Ainsi en mettant QN & QR à la place de qn & qr , on aura

$$PM : PO :: QN : QR;$$

& par conséquent les trois Droites AB, CD, PQ , concourront en un même Point (*N^o. 264.*).

Si le Point donné P , par lequel il faut mener la Droite PQ , n'est pas entre les deux Droites données AB, CD , & que les deux Droites SP, nr , se coupent trop obliquement, pour qu'on apperçoive nettement leur Section q , il sera difficile de prendre exactement la longueur de qr , pour la porter en QR . Ainsi l'on pourra faire quelque erreur, en plaçant le second Point Q , par lequel il faut tirer la Ligne demandée PQ .

Fig. 201
ou 203.

Pour diminuer l'erreur qu'on peut craindre en ce cas, on ne tirera pas la Droite SP ; mais après avoir pris sur PM une partie $M\pi = OP$, on mènera la Droite $S\pi$, qui prolongée, s'il est nécessaire, coupera la Droite nr en k ; beaucoup plus nettement que la Droite SP ou son prolongement ne l'auroit coupée en r : & comme les deux parties qr, NK , sont égales; attendu qu'elles sont proportionnelles aux deux parties $PO, M\pi$, qui sont égales par construction, au lieu de qr , on prendra nk pour le porter en QR ; & par ce moyen le Point Q sera déterminé plus exactement, que si l'on avoit pris qr pour le porter en QR .

C H A P I T R E II.

Des Polygones semblables en général.

266 **O**N a dit (N^o. 243.) que deux Polygones, pour être semblables, doivent avoir tous les Angles égaux chacun à chacun, & les côtés homologues proportionnels ; & l'on a expliqué (N^o. 244.) les attentions qu'il faut avoir en écrivant les noms des Polygones semblables, afin de reconnoître dans leurs nominations, quels sont les côtés homologues qu'il faut comparer dans les Proportions qu'on a à faire.

On a fait voir ensuite que les Triangles avoient les côtés homologues proportionnels, quand ils avoient les Angles égaux ; & réciproquement, qu'ils avoient les Angles égaux, lorsqu'ils avoient les côtés proportionnels : en sorte que pour démontrer que deux Triangles sont semblables, on s'est souvent contenté de faire voir qu'ils avoient les Angles égaux, ou qu'ils avoient les côtés proportionnels.

Il n'en est pas de même des Polygones qui ont plus de trois côtés. Ils peuvent avoir les Angles égaux, sans avoir les côtés proportionnels ; & réciproquement, ils peuvent avoir les côtés proportionnels, sans avoir les Angles égaux. Ainsi pour que deux Polygones qui ont plus de trois côtés, soient réputés semblables, il ne suffit pas qu'on leur trouve les Angles égaux, ou les côtés proportionnels ; mais il faut que, suivant la définition, ils aient en même tems les Angles égaux & les côtés proportionnels.

Par exemple, 1^o. Un Quarré & un Parallélogramme rectangle sont deux Polygones dont les



Angles sont droits, & par conséquent égaux. Mais le Quarré ayant tous les quatre côtés égaux, & le Parallélogramme rectangle n'ayant pas les côtés égaux, ces deux Polygones ne peuvent point avoir les côtés proportionnels, & ne sont pas par conséquent des Figures semblables.

2°. Un Quarré & un Lozange sont deux Polygones qui ont chacun les quatre côtés égaux ; ainsi ces deux Figures ont les côtés proportionnels. Mais les quatre Angles du Quarré étant droits, & les quatre Angles du Lozange ne l'étant pas, ces deux Figures n'ont pas les Angles égaux, & ne sont par conséquent pas semblables.

Il en sera de même de toutes les autres Figures de plus de trois côtés.

DÉFINITIONS.

267 1°. Un Polygone est inscrit dans un Cercle ; quand il a tous les Angles à la Circonférence de ce Cercle ; c'est-à-dire, lorsque tous ses côtés sont des Cordes de ce Cercle.

2°. Un Polygone est circonscrit à un Cercle, quand tous ses côtés sont des Tangentes de ce Cercle.

THÉORÈME.

268 Si des Angles correspondans A & M de deux Polygones semblables ABCDEF, MNOPQR, on tire des Droites aux autres Angles, les Triangles ABC, ACD, ADE, &c. du premier Polygone, seront semblables à ceux MNO, MOP, MPQ, &c. du second Polygone. Fig. 204 & 205.

DÉMONSTRATION.

Puisque les deux Polygones sont semblables, on aura

1°. L'Angle $B = N$ & $AB : MN :: BC : NO$.
Ainsi les deux Triangles ABC, MNO , seront semblables (N°. 259.).

2°. Puisque les Triangles ABC, MNO , sont semblables, on aura l'Angle $ACB = MON$. Mais (*hyp.*) l'Angle $BCD = NOP$. Ainsi retranchant les deux premiers Angles égaux de ces deux-ci, l'on aura l'Angle $ACD = MOP$.

On aura de plus $AC : MO :: BC : NO$.

Mais puisque les Polygones sont semblables, on aura $BC : NO :: CD : OP$.

Donc $AC : MO :: CD : OP$. Ainsi les deux Triangles ACD, MOP , auront les côtés proportionnels autour des Angles égaux ACD, MOP , & seront par conséquent semblables (N°. 259.).

3°. On démontrera de la même manière que les deux Triangles ADE, MPQ , sont semblables : & ainsi des autres.

Donc si l'on divise deux Polygones semblables en Triangles, par des Lignes tirées de deux Angles correspondans à tous les autres, les Triangles du premier Polygone seront semblables aux Triangles du second Polygone. *Ce qu'il falloit démontrer.*

THÉORÈME.

Fig. 204 269 Si deux Polygones $ABCDEF, MNOPQR$,
& 205. d'un même nombre de côtés, sont partagés en Triangles semblables chacun à chacun & semblablement disposés, par des Lignes tirées des Angles A & M à tous les autres Angles ; ces deux Polygones seront semblables.

DÉMONSTRATION.

Pour démontrer que les Polygones $ABCDEF, MNOPQR$, sont semblables, il faut faire voir

qu'ils ont les Angles égaux chacun à chacun , & les côtés directement proportionnels autour des Angles égaux.

1°. Les Triangles ABC , ACD , ADE , AEF , dans lesquels le premier Polygone $ABCDEF$ est partagé , & ceux MNO , MOP , MPQ , MQR , dans lesquels le second Polygone $MNOPQR$ est divisé , étant supposés semblables chacun à chacun & semblablement disposés ; les Angles de ces deux Polygones sont composés d'un même nombre d'Angles égaux chacun à chacun , & sont par conséquent égaux.

2°. Les deux mêmes Polygones $ABCDEF$, $MNOPQR$, ont les côtés directement proportionnels autour des Angles égaux.

Car à cause des deux Triangles semblables ABC , MNO , on a $AB : MN :: BC : NO$, c'est-à-dire , les côtés directement proportionnels autour des Angles égaux B & N des deux Polygones.

Les deux mêmes Triangles semblables ABC , MNO , donnent aussi $BC : NO :: AC : MO$. Mais les Triangles semblables correspondans ACD , MOP donnent $AC : MO :: CD : OP$.

Donc $BC : NO :: CD : OP$; c'est-à-dire , que les côtés sont directement proportionnels autour des Angles correspondans C & O .

Comme il est aisé de voir qu'on démontrera de la même façon que les autres Angles égaux des deux Polygones sont compris entre côtés proportionnels, nous pouvons conclure que les deux Polygones ont tous les côtés proportionnels autour de leurs Angles correspondans que nous avons démontré être égaux ; & que ces Polygones sont par conséquent semblables (N°. 243.). Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Fig. 206. 270 Si d'un Angle quelconque A , d'un Polygone $ABCDEF$, on tire des Lignes indéfinies ACc , ADd , AEe , &c, par tous les autres Angles, & que d'un Point b , pris dans le côté AB ou dans son prolongement, on mène bc parallèle à BC ; qu'ensuite par le Point c , où cette Parallèle rencontre ACc , on tire cd parallèle à CD ; que par le Point d , où cette nouvelle Parallèle rencontre ADd , on tire de parallèle à DE ; & qu'on mène ainsi des Parallèles à tous les côtés du Polygone, en sorte qu'on fasse un nouveau Polygone $abcdef$, dont les Somets des Angles c, d, e , soient dans les Diagonales indéfinies ACc , ADd , AEe , &c; ce nouveau Polygone $abcdef$ sera semblable au premier Polygone $ABCDEF$; puisque ces deux Polygones seront composés de Triangles semblables, & semblablement disposés.

On voit par ce Corollaire comment on peut faire un Polygone semblable à un Polygone donné.

COROLLAIRE II.

Fig. 204. 271 Donc si l'on tire deux Diagonales AD, MP ,
& 205. par les Angles correspondans de deux Polygones semblables $ABCDEF, MNOPQR$, les deux parties $ABCD, ADEF$, du premier Polygone, seront semblables chacune à chacune aux deux parties $MNOP, MPQR$, du second Polygone. Car si dans les deux parties correspondantes $ABCD, MNOP$, l'on tire les Diagonales AC, MO , les Triangles ABC, ACD , qui composeront la partie $ABCD$, seront semblables aux Triangles MNO, MOP , qui composeront la partie correspondante

MNOP (N^o. 268.): de plus, ces Triangles semblables seront disposés de la même façon. Ainsi les deux parties **ABCD**, **MNOP**, seront semblables (N^o. 269.).

On démontrera de même que les deux autres parties correspondantes **ADEF**, **MPQR**, sont composées de Triangles semblables & semblablement disposés; & que ces deux parties seront par conséquent semblables (N^o. 269.).

COROLLAIRE III.

272 Donc les Diagonales **AC**, **MO**, qui passeront par les Angles correspondans de deux Parallélogrammes semblables **ABCD**, **MNOP**, les partageront en Triangles semblables chacun à chacun. Ainsi lorsqu'on aura deux Triangles semblables **ABC**, **MNO**, on pourra les regarder comme les moitiés de deux Parallélogrammes semblables **ABCD**, **MNOP**. Fig. 207 & 208.

CHAPITRE III.

Des Points semblablement placés.

DÉFINITIONS.

1^o. **273** Deux Points **G**, **S**, sont semblablement placés par rapport à deux Droites **AB**, **MN**, ou par rapport aux Points **A**, **B**, & **M**, **N**, qui terminent ces Lignes, lorsque les distances **GA**, **GB**, de l'un **G** de ces Points, aux extrémités de la Droite **AB**, sont aux distances **SM**, **SN**, de l'autre Point **S**, aux extrémités de la Droite **MN**, dans le rapport de **AB** à **MN**; c'est-à-dire, lorsque Fig. 209 & 210, ou 211 & 212.

$$GA : GB : AB :: SM : SN : MN,$$

Fig. 209 Si les Points G, S , sont situés dans les Droites AB ,
& 210. MN ; pour démontrer qu'ils sont semblablement placés par rapport à ces Lignes, il suffira de faire voir que $GA:GB::SM:SN$, ou que $GA:SM::GB:SN$. Car alors on aura $GB:SN::GA+GB:SM+SN$ (No. 214.); c'est-à-dire, $GB:SN::AB:MN$. Ainsi en mettant les Antécédens de ces Rapports égaux dans une Suite, & les Conséquens dans une autre Suite, on aura $GA:GB:AB::SM:SN:MN$.

Dans le même cas où les Points G, S , seront situés dans les Droites AB, MN ; lorsqu'on voudra démontrer que ces Points sont semblablement placés par rapport à ces deux Droites, il suffira encore de prouver que $AB:GA::MN:SM$, ou que $AB:MN::GA:SM$; c'est-à-dire, que la distance du Point G à l'un des bouts de la Droite AB est à la distance du Point S à l'un des bouts de la Droite MN , comme la Droite AB est à la Droite MN . Car alors on aura $AB:MN::AB-GA:MN-SM$ (No. 224.); c'est-à-dire, $AB:MN::GB:SN$. Ainsi en mettant les Antécédens de ces Rapports égaux dans une Suite, & leurs Conséquens dans une autre Suite, on aura $AB:GA:GB::MN:SM:SN$.

Fig. 211 Dans le cas où les Points G, S' , seront au dehors des
& 212. Droites AB, MN ; pour prouver que ces Points sont semblablement placés par rapport à ces Lignes, il suffira de prouver que les Triangles AGB, MSN , sont semblables; puisqu'alors on aura $GA:GB:AB::SM:SN:MN$.

Fig. 215 2°. Lorsque deux Droites FG, RS , seront termi-
& 216. nées par des Points semblablement placés par rapport à deux Droites AB, MN , on les nommera Lignes homologues par rapport aux deux Droites AB, MN .

Fig. 219 3°. On dit que deux Points G, S , sont semblable-
& 220, ment placés par rapport à deux Polygones sembla-
ou 221 bles $AB C D E F, M N O P Q R$, lorsqu'ils sont
& 222.

semblablement placés par rapport à tous les côtés correspondans de ces Polygones.

COROLLAIRE I.

274 Donc les extrémités B, N , de deux Droites AB, MN , sont semblablement placées par rapport à ces deux Droites. Car ces deux Points B, N , sont dans les Droites AB, MN ; & leurs distances BA, NM , aux extrémités A, M , des deux Droites AB, MN , sont proportionnelles à ces deux Droites. Fig. 209 & 210.

COROLLAIRE II.

275 Deux Points G, S , étant semblablement placés par rapport à deux Droites AB, MN ; si de ces Points on mene à ces deux Lignes des Droites GH, ST , de maniere que les deux Angles GHB, STN , soient égaux & disposés de la même façon, les deux Points H, T , dans lesquels les deux Droites AB, MN , seront rencontrées, seront semblablement placés par rapport à ces deux Droites. Fig. 211 & 212, ou 213 & 214.

Car si des Points G, S , on mene les Droites GA, GB , & SM, SN , aux extrémités des deux Droites AB, MN , les Triangles AGB, MSN , seront semblables (N^o. 273.); & l'on aura par conséquent l'Angle $ABG = MNS$: & comme l'Angle $GHB = STN$ (*hyp.*), les deux Triangles BGH, NST , auront deux Angles égaux chacun à chacun, & seront par conséquent semblables (N^o. 254.).

Mais les Triangles AGB, MSN , étant semblables., on aura $AB : MN :: GB : SN$;

Et les deux Triangles BGH, NST , étant aussi semblables, on aura $GB : SN :: HB : TN$.

On aura donc $AB : MN :: HB : TN$; & par conséquent (N^o. 273.) les Points H, T , seront semblablement placés dans les deux Droites HB, MN .

COROLLAIRE III.

Fig. 213 & 214. 276 Il suit évidemment du Corollaire précédent, que deux Points G, S , étant semblablement placés par rapport à deux Droites AB, MN , si de ces deux Points on mene des Perpendiculaires GH, ST , à ces deux Droites, les deux Points H, T , où les Droites AB, MN , seront rencontrées, seront semblablement placés par rapport à ces deux Droites; car les Angles GHB, STN , seront égaux.

COROLLAIRE IV.

Fig. 204 & 205. 277 Puisqu'il est démontré (N^o. 268.) que si des Sommets de deux Angles correspondans quelconques A & M de deux Polygones semblables $ABCDEF, MNOPQR$, on tire des Droites à tous les autres Angles, les Triangles BAC, CAD, DAE, EAF , dans lesquels le premier Polygone sera divisé, seront semblables aux Triangles correspondans NMO, OMP, PMQ, QMR , dans lesquels le second Polygone sera partagé; il faut en conclurre (N^o. 273.) que les Sommets A & M de deux Angles correspondans quelconques de deux Polygones semblables, $ABCDEF, MNOPQR$, sont semblablement placés par rapport à tous les côtés homologues de ces Polygones, sans en excepter les côtés AB, AF , & leurs homologues MN, MR , à l'égard desquels il est prouvé (N^o. 274.) que les Points A, M , sont semblablement placés.

Et comme deux Points sont semblablement placés à l'égard de deux Polygones semblables, lorsqu'ils sont semblablement placés par rapport à tous les côtés correspondans de ces Polygones (N^o. 273.); il est clair que les Sommets A, M , de deux Angles correspondans quelconques de deux Polygones semblables

blables $ABCDEF$, $MNOPQR$, sont semblablement placés par rapport à ces Polygones.

T H É O R È M E.

278 Soient deux Points F , R , semblablement placés par rapport à deux Droites AB , MN ; & soient deux autres Points G , S , aussi semblablement placés à l'égard des deux mêmes Droites : les Droites homologues FG , RS , qui seront terminées par ces Points semblablement placés, seront dans le même rapport que les deux premières Droites AB , MN ; c'est-à-dire, qu'on aura

$$FG : RS :: AB : MN.$$

D É M O N S T R A T I O N.

Les Points F , R , étant semblablement placés à l'égard des deux Droites AB , MN , les Triangles AFB , MRN , seront semblables (N^o. 273.); & par conséquent les Angles FAB , RMN , seront égaux.

Les Points G , S , étant aussi semblablement placés à l'égard des mêmes Droites AB , MN , les Triangles AGB , MSN , seront semblables; & par conséquent les Angles GAB , SMN , seront égaux.

Retranchant les deux Angles égaux FAB , RMN , des deux Angles égaux GAB , SMN , les Angles restans FAG , RMS , seront égaux.

Les Triangles semblables AFB , MRN , donneront $AF : MR :: AB : MN$.

Les Triangles semblables AGB , MSN , donneront $AB : MN :: AG : MS$.

On aura donc $AF : MR :: AG : MS$. Ainsi les deux Angles égaux FAG , RMS , seront compris entre côtés proportionnels; & par conséquent les

Géom.

Q *

deux Triangles FAG , RMS , seront semblables (N^o. 259.), & donneront

$$FG : RS :: AF : MR.$$

Mais on a déjà trouvé $AF : MR :: AB : MN$.

Donc on aura enfin $FG : RS :: AB : MN$.

Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Fig. 215
& 216.

279 Donc si deux Droites FG , RS , sont terminées par des Points semblablement placés à l'égard de deux autres Droites AB , MN , les extrémités des deux Lignes AB , MN , seront aussi des Points semblablement placés par rapport aux deux Droites FG , RS .

Car puisqu'il est démontré (N^o. 278.) que les Triangles FAG , RMS , sont semblables, les Points A & M seront semblablement placés à l'égard des deux Droites FG , RS (N^o. 273.).

On démontrera de la même manière que les deux Points B , N , sont semblablement placés à l'égard des deux Droites FG , RS , en faisant voir que les Triangles BFG , NRS , sont semblables.

COROLLAIRE II.

Fig. 217
& 218.

280 Donc si trois Points F , G , H , sont placés à l'égard d'une Droite AB , comme trois autres Points R , S , T , le sont à l'égard d'une autre Droite MN , le Triangle FGH , qui aura ses Angles aux trois premiers Points, sera semblable au Triangle RST , qui aura ses Angles aux trois derniers.

$$\text{Car on aura (N}^{\circ}\text{. 278.)} \begin{cases} FG : RS :: AB : MN \\ GH : ST :: AB : MN \\ FH : RT :: AB : MN. \end{cases}$$

C'est-à-dire, que les trois côtés du Triangle FGH

seront à ceux du Triangle RST dans le rapport de AB à MN . Ainsi ces deux Triangles auront tous les côtés proportionnels, & seront par conséquent semblables (N^o. 261.).

COROLLAIRE III.

281 Puisque les Triangles FGH , RST , sont Fig. 217, semblables, il faut en conclure (N^o. 273.) que si & 218. trois Points F , G , H , & trois autres Points R , S , T , sont semblablement placés à l'égard de deux Droites AB , MN , les trois premiers Points F , G , H , & les trois derniers R , S , T , sont semblablement placés entr'eux; c'est-à-dire, que l'un quelconque H des trois premiers Points est situé à l'égard des deux autres F , G , ou par rapport à la Droite FG qui les joint, comme le Point correspondant T , pris parmi les trois derniers Points, est placé à l'égard des deux autres R , S , ou par rapport à la Droite RS qui les joint.

THÉORÈME.

282 Lorsque deux Points H , T , sont semblablement Fig. 217, placés à l'égard de deux Droites FG , RS , qui sont ter- & 218. minées par des Points semblablement placés à l'égard de deux autres Droites AB , MN ; ces Points H , T , sont aussi semblablement placés à l'égard des deux Droites AB , MN .

DÉMONSTRATION.

Car les extrémités des deux Droites FG , RS , étant semblablement placées à l'égard des deux Droites AB , MN (*hyp.*), les extrémités des deux Droites AB , MN , seront réciproquement semblablement placées à l'égard des deux Droites FG , RS (N^o. 279.):

O ij

& comme (*hyp.*) les deux Points H, T , sont aussi semblablement placés à l'égard des deux Droites FG, RS , les trois Points A, B, H , & leurs correspondans M, N, T , seront semblablement placés à l'égard des deux Droites FG, RS . Ainsi les Triangles AHB, MTN , seront semblables (*Nº. 280.*); & par conséquent les deux Points H, T , seront semblablement placés à l'égard des deux Droites AB, MN . Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

Fig. 219 & 220, ou 221 & 222. **283** Les côtés correspondans AB, MN , de deux Polygones semblables $ABCDE, MNOPQ$, sont (*Nº. 277.*) semblablement placés par rapport à tous les côtés homologues de ces Polygones, & par conséquent à l'égard de ces Polygones eux-mêmes.

Donc si deux Points G, S , sont semblablement placés à l'égard de deux côtés homologues AB, MN , ils seront aussi semblablement placés à l'égard de tous les autres côtés homologues des deux Polygones $ABCDE, MNOPQ$ (*Nº. 282.*); & par conséquent (*Nº. 273.*) ils seront semblablement placés à l'égard de ces deux Polygones.

COROLLAIRE II.

Fig. 219 & 220, ou 221 & 222. **284** Si deux Lignes FG, RS , sont terminées par des Points semblablement placés à l'égard des Polygones semblables $ABCDE, MNOPQ$, ou à l'égard de deux côtés homologues AB, MN , de ces Polygones; les Points H, T , qui seront semblablement placés par rapport aux deux Droites FG, RS , seront aussi semblablement placés à l'égard des côtés homologues AB, MN (*Nº. 282.*), & par conséquent (*Nº. 283.*) seront semblablement placés à l'égard des deux Polygones.

Il suit de là que les Points G, S , qui seront semblablement placés à l'égard de deux Diagonales homologues CE, OQ , de deux Polygones semblables $ABCDE, MNOPQ$, seront semblablement placés par rapport à ces Polygones.

T H É O R È M E.

285 Soient deux Polygones semblables $ABCDEF$, $MNOPQR$. Si l'on fait passer une Circonférence par les sommets A, C, E , de trois Angles quelconques du premier Polygone, & une autre Circonférence par les sommets M, O, Q , de trois Angles correspondans du second, les Centres G, S , de ces deux Circonférences, seront des Points semblablement placés à l'égard des deux Polygones. Fig. 223 & 224.

D É M O N S T R A T I O N.

Puisque (N^o. 277.) les sommets des Angles correspondans de deux Polygones semblables sont semblablement placés à l'égard de tous les côtés homologues de ces Polygones, les trois Points A, C, E , & leurs correspondans M, O, Q , seront semblablement placés à l'égard des côtés homologues AB, MN , des deux Polygones semblables $ABCDEF, MNOPQR$; & par conséquent (N^o. 280.) les deux Triangles ACE, MOQ , qui auront leurs Angles à ces Points semblablement placés, seront semblables. Ainsi les Angles CAE, OMQ , qui auront le sommet à la Circonférence, seront égaux; & les Arcs CE, OQ , compris entre leurs côtés, seront aussi égaux (N^o. 90.), ou plutôt contiendront un même nombre de degrés. Donc si des Centres G, S , des deux Cercles, on tire des Rayons aux extrémités des deux Arcs CE, OQ , les deux Angles CGE, OSQ , seront

égaux; & par conséquent les deux Triangles isosceles CGE , OSQ , seront semblables (N^o . 255.). Ainsi (N^o . 273.) les Centres G , S , seront semblablement placés à l'égard des deux Diagonales homologues CE , OQ , & seront par conséquent semblablement placés à l'égard des deux Polygones semblables $ABCDEF$, $MNOPQR$ (N^o . 284.). Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Fig. 225 & 226. 286 Donc si les Polygones semblables $ABCDEF$, $MNOPQR$, sont inscrits dans des Cercles, les Centres G , S , de ces Cercles, seront des Points semblablement placés à l'égard de ces Polygones.

L E M M E.

Fig. 227. 287 Lorsqu'un Angle BAD est formé par deux Lignes droites qui touchent un même Cercle, la Droite AC , tirée par le sommet de l'Angle & par le Centre du Cercle, divise cet Angle en deux parties égales.

DÉMONSTRATION.

Soient tirés les Rayons CB , CD , du Centre aux deux Points d'attouchement; ces Rayons seront perpendiculaires sur les Tangentes AB , AD (N^o . 64.). Ainsi (N^o . 43.) l'Oblique CA s'éloignera également de ces deux Perpendiculaires égales; ce qui donnera $AB=AD$. Donc les deux Triangles ABC , ADC , auront tous les côtés égaux chacun à chacun, & par conséquent (N^o . 118.) seront parfaitement égaux. D'où il suit enfin qu'on aura l'Angle $BAC =$ l'Angle DAC ; c'est-à-dire, que l'Angle BAD sera divisé en deux parties égales par la Droite AC . Ce qu'il falloit démontrer.

T H É O R È M E.

288 Soient deux Polygones semblables $ABCDEFGHI$, $abcdeghi$. Si l'on décrit un Cercle qui soit touché par trois côtés quelconques AB, DE, FG , du premier Polygone, & qu'on fasse un autre Cercle qui soit touché par les trois côtés correspondans ab, de, fg , du second Polygone; les Centres K, k , de ces deux Cercles, seront des Points semblablement placés dans ces deux Polygones. Fig. 218
& 229.

DÉMONSTRATION.

Soient prolongés dans le premier Polygone les côtés tangens AB, DE, FG , jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en L, M ; puis soient menées les Diagonales AG, BD , & soient tirées du Centre K les Droites KL, KM , qui (N^o. 287.) diviseront en deux parties égales les Angles MLF, LME . Soient aussi prolongés dans le second Polygone les côtés correspondans tangens ab, de, fg , jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en l, m ; puis soient tirées les Diagonales correspondantes ag, bd , & du Centre k soient menées les Droites kl, km , qui (N^o. 287.) diviseront en deux parties égales les deux Angles $m lf, l m e$.

Puisque (hyp.) les deux Diagonales AG, ag , passent par les Angles correspondans des deux Polygones semblables, les parties correspondantes $AB C D E F G, abcde f g$, seront des Polygones semblables (N^o. 271.); & les Angles BAG, FGA , seront égaux aux Angles bag, fga . Ainsi les supplémens LAG, LGA , des deux premiers Angles BAG, FGA , seront égaux aux supplémens lag, lga , des deux seconds bag, fga : & par conséquent (N^o. 254.) les deux Triangles ALG, alg , seront semblables; & les Points L, l , seront sembla-

216. *Liv. IV. Chap. III. DES POINTS*
 blement placés à l'égard des deux Diagonales homologues AG, ag (N^o. 273.), & par rapport aux deux Polygones semblables $ABCDEFGHI, abcdefghi$ (N^o. 284.).

On démontrera de la même manière que les Triangles BMD, bmd , seront semblables & que les Points M, m , seront aussi semblablement placés dans les deux Polygones semblables.

Les Triangles ALG, BMD , étant semblables, aux Triangles correspondans alg, bmd , les Angles L, M , formés par des Tangentes, seront égaux aux Angles l, m , aussi formés par des Tangentes; & les moitiés MLK, LMK , des deux premiers, seront égales aux moitiés mlk, lmk , des deux autres correspondans. Ainsi le Triangle LKM sera semblable au Triangle lkm ; & par conséquent (N^o. 273.) les Centres K, k , seront semblablement placés par rapport aux deux Droites LM, lm : & comme ces deux Droites se terminent à des Points semblablement placés par rapport aux deux Polygones $ABCDEFGHI, abcdefghi$, les deux Centres K, k , seront (N^o. 284.) semblablement placés par rapport à ces Polygones semblables. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Fig. 230 & 231. 289 Donc si deux Polygones semblables $ABCDEF, abcdef$, sont circonscrits à des Cercles, les Centres K, k , de ces Cercles, seront des Points semblablement placés dans ces deux Polygones.

Et attendu que deux Cercles peuvent être regardés comme deux Polygones semblables d'une infinité de côtés, circonscrits à de véritables Cercles, il est clair que les Centres de deux Cercles sont des Points semblablement placés dans ces Cercles.

SCHOLIE.

C'est sur la Théorie des Points semblablement placés renfermée dans ce Chapitre, que sont fondés les différens moyens qu'on met en usage pour faire des Cartes Topographiques. Ainsi c'est ici le lieu d'expliquer les opérations que les Géographes & les Arpenteurs font, tant pour connoître comment différens Lieux sont situés les uns à l'égard des autres, que pour représenter leurs positions sur une Carte ou dans un espace donné. Comme le détail des opérations que demandent les différentes Méthodes de lever les Plans, relativement aux difficultés que l'on peut rencontrer, & aux différens instrumens qu'on peut employer, pourroit faire le sujet d'un Traité particulier trop étendu pour être inséré dans celui-ci, nous nous contenterons d'exposer en gros & généralement les opérations qui sont les plus ordinaires.

I.

290 Soient les Points *A, B, C, D, E, F, G, H, I, &c.* Fig. 131. considérés comme différens Clochers ou Points remarquables, dont il faut déterminer les situations, & les représenter sur une Carte.

On fera mesurer exactement, dans une partie unie & découverte de la campagne, & suivant quelle direction l'on voudra, une Ligne droite *MN*, des extrémités de laquelle on puisse apercevoir plusieurs des Points dont on veut avoir la situation.

Ensuite après avoir choisi un instrument propre à mesurer ou à prendre l'ouverture des Angles, on prendra à chacune des extrémités de la Droite *MN* l'ouverture des Angles que cette Ligne formera avec les Lignes dirigées vers les Points *A, B, C, D, E,*

qu'on pourra apercevoir des deux Points M, N : c'est-à-dire, que dans une premiere station qu'on fera en M , on prendra l'ouverture des Angles NMA, NMB, NMC, NMD, NME ; & dans une seconde station qu'on fera en N , on prendra l'ouverture des Angles MNA, MNB, MNC, MND, MNE .

Les Points A, B, C, D, E , ainsi observés des deux extrémités de la Droite MN , seront les sommets d'autant de Triangles MAN, MBN, MCN, MDN, MEN , qui auront tous pour base la même Ligne mesurée MN , & dans chacun desquels on aura pris l'ouverture des deux Angles à cette base. Ainsi l'on connoîtra assez de choses dans ces Triangles, pour en faire d'autres qui leurs soient semblables, & qui soient établis sur une même base relative à MN .

Fig. 232 Pour représenter sur la Carte la position des
& 233. premiers Clochers ou Points remarquables qu'on a vûs & observés des deux extrémités de la Droite MN , on tracera d'abord sur le papier une Droite mn qui contiendra autant de parties égales de grandeur quelconque, qu'on aura trouvé de mesures dans la Droite MN . Par exemple, si l'on a trouvé dans MN 100 mesures chacune de 10 Toises, & qu'on veuille que 10 Toises du terrain soient représentées sur la Carte par une Ligne, on fera la Droite mn de 100 Lignes.

Ensuite on tirera par le Point m des Droites ma, mb, mc, md, me , qui fassent avec mn des Angles nma, nmb, nmc, nmd, nme , égaux à ceux NMA, NMB, NMC, NMD, NME , dont on a pris l'ouverture au Point M ; & l'on mènera par le Point n des Droites na, nb, nc, nd, ne , qui fassent avec nm des Angles mna, mnb, mnc, mnd, mne ,

égaux à ceux MNA , MNB , MNC , MND , MNE , qu'on a observés au Point N . Par ce moyen l'on construira sur mn des Triangles man , $m\hat{b}n$, $m\hat{c}n$, $m\hat{d}n$, $m\hat{e}n$, qui (N^o. 254.) seront semblables chacun à chacun aux Triangles MAN , MBN , MCN , MDN , MEN , qui sont sur la Droite MN ; & les sommets a , b , c , d , e , des premiers, représenteront sur la Carte les sommets A , B , C , D , E , des derniers, c'est-à-dire, la situation des Clochers ou Points remarquables qu'on a vus des deux extrémités de la Droite MN .

Si l'on veut avoir les positions d'un plus grand nombre de Points, pour les marquer sur la Carte, on imaginera une Droite AB tirée par deux Points A & B déjà déterminés; & l'on prendra à chaque extrémité de cette Ligne l'ouverture des Angles qu'elle formera avec les rayons visuels dirigés de ces extrémités vers de nouveaux Clochers ou Points remarquables F & G . Les Points F , G , ainsi observés, seront les sommets d'autant de nouveaux Triangles AFB , AGB , établis sur une même base AB , & dans chacun desquels on connaîtra deux Angles; en sorte que dans la Carte on en pourra construire de semblables afb , agb , sur une Ligne ab terminée par les deux Points a & b qui représentent les Points A & B . Les nouveaux Triangles afb , agb , étant construits, leurs sommets f , g , représenteront les deux Points F , G .

On représentera de même sur la Carte, par de nouveaux Points h , i , la situation de tous les Points remarquables H , I , qu'on pourra voir des deux Points B , D ; & l'on y marquera de la même manière tant d'autres Points qu'on voudra, qui représenteront les positions d'autant d'autres Points du terrain vus de deux Points déjà déterminés.

Pour démontrer que les Points $a, b, c, d, e, f, g, h, i, m, n$ ainsi placés sur la Carte, représentent exactement la position des Points remarquables $A, B, C, D, E, F, G, H, I, M, N$, du Pays, & l'arrangement que ces Points ont entr'eux, il faut faire voir que toutes les distances qui sont entre les Points $A, B, C, D, E, F, G, H, I, M, N$, sont proportionnelles aux distances qui sont entre les Points correspondans $a, b, c, d, e, f, g, h, i, m, n$.

Les premiers Points A, B, C, D, E , qu'on a observés des deux extrémités de la base MN , & leurs correspondans a, b, c, d, e , qu'on a marqués sur la Carte, étant les sommets de Triangles semblables chacun à chacun, & semblablement disposés à l'égard de leurs bases MN, mn , sont semblablement placés par rapport à ces deux bases MN, mn (N^o. 273.).

Les Points F, G , & leurs correspondans f, g , étant aussi les sommets de Triangles semblables chacun à chacun, & semblablement disposés sur leurs bases AB, ab , sont semblablement placés par rapport à ces deux bases (N^o. 273.): & comme ces deux bases AB, ab , sont terminées par des Points semblablement placés à l'égard des deux Droites MN, mn , les Points F, G , & leurs correspondans f, g , seront aussi semblablement placés à l'égard des deux Droites MN, mn (N^o. 282.).

On prouvera de même, que les Points H, I , & leurs correspondans h, i , sont semblablement placés à l'égard des deux Droites MN, mn ; & ainsi des autres.

Les Points $A, B, C, D, E, F, G, H, I, M, N$, & leurs correspondans $a, b, c, d, e, f, g, h, i, m, n$, étant semblablement placés par rapport aux deux Droites MN, mn , (car (N^o. 274.) il faut comprendre les extrémités des Droites MN, mn , parmi les Points semblablement placés par rapport à ces deux Lignes).

toutes les Droites par lesquelles on joindra deux à deux les premiers, seront aux Droites par lesquelles on joindra deux à deux les derniers, dans le rapport de MN à mn (N^o. 278.) ; c'est-à-dire, que les distances comprises entre les Points $A, B, C, D, E, F, G, H, I, M, N$, du terrain, seront proportionnelles aux distances comprises entre les Points correspondans $a, b, c, d, e, f, g, h, i, m, n$, marqués sur la Carte : d'où il suit que les Points $a, b, c, d, e, f, g, h, i, m, n$, seront arrangés sur la Carte de la même manière que les Points $A, B, C, D, E, F, G, H, I, M, N$, le sont sur le terrain.

Comme le nombre des petites mesures contenues dans la Droite mn , & que nous avons supposées être des *Lignes*, représente le nombre des mesures de 10 Toises contenues dans MN , il est clair que les différens nombres de petites mesures ou *Lignes* qu'on trouvera entre les Points $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, de la Carte, représenteront les différens nombres de mesures de 10 Toises comprises entre les Points $A, B, C, D, E, F, G, H, I$, du terrain. Ainsi mn , ou toute autre Ligne qui sera divisée en parties égales aux petites mesures dont la Ligne mn est composée, fera une Échelle propre à mesurer les distances comprises entre les différens Points de la Carte, & à faire connoître les véritables distances comprises entre les différens Points du terrain.

Quoique la méthode dont on vient de donner une idée puisse aussi être mise en usage pour déterminer le cours des rivières, les sinuosités des chemins, les contours de tous les terrains particuliers. & pour les représenter sur une Carte, on évite cependant de s'en servir lorsqu'il s'agit de tous ces détails ; parce que pour les bien faire & les représenter exactement, il faut nécessairement parcourir & mesurer toutes les parties du terrain dont on veut déterminer

la figure. On va donner un exemple de ces opérations de détail, dans le Paragraphe suivant.

I I.

Fig. 234. 291 Supposons qu'on ait à détailler le cours d'une Riviere, ou les sinuosités d'un Chemin $A B C D E$, entre deux Points A & E déterminés & marqués sur la Carte suivant la Méthode qu'on vient d'expliquer.

On prendra une Boussole garnie de Pinules, dont on fait que l'Aiguille aimantée se dirigera toujours suivant une Ligne *Nord & Sud*, ou suivant une Ligne de déclinaison, qui dans le peu d'étendue du cours $A B C D E$ s'éloignera également de la Ligne *Nord & Sud*; en sorte que toutes les directions $A N$, $B N$, $C N$, $D N$, que prendra l'Aiguille aimantée aux différens Points A , B , C , D , de la Riviere ou du Chemin, pourront être regardées comme parallèles.

Ensuite après avoir fait planter des Piquets aux extrémités A , E , & à tous les coudes B , C , D , de la Riviere ou du Chemin, on prendra à chacun des Piquets les Angles $N A B$, $N B C$, $N C D$, $N D E$, que fera la direction de l'Aiguille aimantée avec le rayon visuel, par lequel on apercevra au travers des Pinules le Piquet voisin de celui où l'on sera; & l'on mesurera toutes les distances $A B$, $B C$, $C D$, $D E$, qui seront entre les Piquets.

Avant de rapporter sur la Carte les ouvertures des Angles & les distances mesurées sur le terrain, on tracera sur un papier à part une Droite $a n$, pour représenter la direction $A N$ que l'Aiguille aimantée avoit au Point A du terrain; & l'on y marquera un Point a , pour représenter le premier Point A de la Riviere ou du Chemin. Puis ayant fait un Angle $n a b$ égal à celui $N A B$ que l'Aiguille aimantée faisoit en A avec la direction des Pinules par lesquelles on voyoit

le Piquet suivant B , on fera le côté ab de cet Angle Fig. 234
égal à autant de parties de l'Échelle de la Carte, & 235
qu'on aura trouvé dans AB de mesures correspondantes aux parties de l'Échelle; c'est-à-dire, que si les parties de l'Échelle de la Carte représentent des mesures de 10 Toises, & qu'on ait trouvé dans AB 6 mesures de 10 Toises, on fera le côté ab égal à 6 parties de l'Échelle.

Ensuite ayant mené par le Point b une Droite bn parallèle à an , pour représenter la direction BN que l'Aiguille aimantée avoit en B , & ayant fait l'Angle nbc égal à l'Angle NBC que l'Aiguille aimantée faisoit en B avec le rayon visuel BC , on fera le côté bc égal à autant de parties de l'Échelle qu'on aura trouvé de mesures dans BC .

Après avoir aussi mené par le Point c une Droite cn parallèle à an , & fait l'Angle ncd égal à l'Angle NCD observé en C , on fera cd égal à autant de parties de l'Échelle qu'on aura trouvé de mesures dans CD .

Enfin par le Point d ayant mené dn parallèle à an , & ayant fait l'Angle nde égal à l'Angle NDE que l'Aiguille aimantée faisoit en D avec le rayon visuel DE , on portera de d en e autant de parties de l'Échelle qu'on aura trouvé de mesures dans DE .

Comme les Droites AB , BC , CD , DE , qui joignent les Piquets plantés le long de la Riviere ou du Chemin, sont proportionnelles aux Droites correspondantes ab , bc , cd , de , tracées à part sur un papier volant, & que ces Lignes correspondantes renferment des Angles égaux chacun à chacun; il est aisé de voir que les Points A, B, C, D, E , & leurs correspondans a, b, c, d, e , sont semblablement placés les uns à l'égard des autres. Car en tirant les Droites AC , BD , CE , & leurs correspondantes ac , bd , ce , les

Triangles ABC , BCD , CDE , seront semblables aux Triangles abc , bcd , cde . Ainsi la Figure $abcde$, qu'on a construite à part, représente le cours de la Riviere ou du Chemin $ABCDE$.

Fig. 235,
236 & 234.

Si la distance des Points extrêmes a , e , de la Figure qu'on a décrite à part se trouve à distance des Points a , e , marqués sur la Carte, on achèvera l'opération en rapportant ou calquant sur la Carte la Figure $abcde$; & l'on aura sur la Carte un trait $abcde$ qui représentera la partie $ABCDE$ de la Riviere ou du Chemin qu'il falloit lever.

Lorsque la distance ae des Points extrêmes de la Figure tracée à part est plus ou moins grande que la distance $a e$ des Points donnés sur la Carte, on a recours à différens expédiens dont il est inutile de parler ici, pour corriger la Figure qu'on a faite à part, ou pour en faire raccorder les extrémités a , e , avec les Points a , e , donnés sur la Carte.

I I I.

Fig. 237
& 238.

292 Lorsque le terrain qu'on doit lever n'est pas d'une grande étendue, comme une piece de Terre, on se sert assez souvent, pour en déterminer la figure, d'une Équerre d'Arpenteur garnie de quatre Pinules, dont les fentes sont dans deux Plans perpendiculaires l'un à l'autre.

Supposons que $ABCDE F$ soit le terrain dont il faut lever le Plan. Après avoir tiré ou marqué avec des Piquets une Droite FD qui passe par deux Points quelconques les plus commodes de la Figure, on cherchera par le moyen de l'Équerre les Points G, H, I, K , de cette Ligne, qui répondent perpendiculairement aux Angles A, B, C, E , de la Figure.

Les Points G, H, I, K , étant ainsi déterminés, on

on mesurera les Perpendiculaires AG , BH , CI , EK ; & l'on mesurera aussi les parties FG , GH , HI , IK , KD , de la Droite FD .

Toutes ces mesures étant prises sur le terrain, on les rapportera sur le papier comme il suit.

Après avoir fait une Échelle dont les parties représentent des toises ou autres mesures dont on s'est servi pour mesurer sur le terrain, on tirera une Droite fd égale à autant de parties de l'Échelle qu'on aura trouvé de mesures dans la Ligne entière FD : & ayant marqué sur cette Ligne des Points g , h , i , k , tels que les parties fg , gh , hi , ik , contiennent autant de parties de l'Échelle, qu'on a trouvé de mesures dans FG , GH , HI , IK , on élèvera sur la Ligne FD des Perpendiculaires ga , hb , ic , ke , égales à autant de parties de l'Échelle, qu'on a trouvé de mesures dans les Perpendiculaires correspondantes GA , HB , IC , KE . Enfin l'on joindra les Points a , b , c , d , e , f , par des Lignes droites ab , bc , cd , de , ef , fa , qui représenteront sur le papier le contour du terrain $ABCDEF A$; ce qui est facile à démontrer.

Car les Triangles rectangles FGA , AGD , FHB , BHD , FIC , CID , $FK E$, $EK D$, & leurs correspondans fga , agd , fhb , bhd , fic , cid , fke , ekd , ayant les côtés proportionnels autour de l'Angle droit, seront semblables chacun à chacun. Ainsi les Triangles FAD , FBD , $FC D$, FED , & leurs correspondans fad , $fb d$, $fc d$, fed , seront composés de Triangles semblables chacun à chacun, & seront par conséquent semblables (N^o. 269.): d'où il suit (N^o. 273.) que les Points A , B , C , E , & leurs correspondans a , b , c , e , seront semblablement placés à l'égard des deux Droites FD , fd ; & que tous les Points A , B , C , D , E , F , & leurs correspondans a , b , c , d , e , f , seront semblablement placés entr'eux.

I V.

293 Enfin lorsque le terrain dont on doit lever le Plan, n'a que très-peu d'étendue, on le divise en Triangles par des Lignes droites tirées d'un même Angle à tous les autres ; & après avoir mesuré tous les côtés de ces Triangles, on fait sur le papier des Triangles semblables à ceux qu'on a mesurés sur le terrain, en donnant aux côtés des Triangles qu'on trace sur le papier autant de parties de l'Échelle qu'on a trouvé de mesures dans les côtés des Triangles du terrain. Comme nous avons donné (N^o. 270.) la maniere de faire des Triangles semblables à d'autres dont tous les côtés sont connus, il est inutile d'entrer dans un plus grand détail par rapport à la maniere de lever le Plan d'un terrain de peu d'étendue.

C H A P I T R E I V.

Des Rapports des Lignes homologues, & des Contours des Figures semblables.

Fig. 219
& 220,
ou 221
& 222.

294 N Ous avons démontré (N^o. 278.) que toutes les Droites telles que FG , RS , qui se terminent à des Points semblablement placés à l'égard de deux Lignes droites AB , MN , qui peuvent être les côtés homologues de deux Polygones semblables $ABCDE$, $MNOPQ$, étoient en même rapport que ces Lignes droites ou côtés homologues AB , MN : & comme les Polygones semblables ont essentiellement tous leurs côtés homologues proportionnels (N^o. 243.), il est clair que toutes les Lignes droites telles que FG , RS , qui se termineront à des

Points semblablement placés à l'égard de deux côtés homologues AB , MN , de deux Polygones semblables, seront en même rapport que tous les côtés de ces Polygones.

T H É O R È M E.

295 Les circuits de deux Polygones semblables sont entr'eux comme leurs côtés homologues.

D É M O N S T R A T I O N.

Puisque les Polygones $ABCDEF$, $MNOPQR$; Fig. 204
ou 205.
sont semblables, on aura (N^o. 243.)

$$AB : MN :: BC : NO :: CD : OP :: DE : PQ :: EF : QR :: FA : RM.$$

Donc (N^o. 217.) $AB + BC + CD + DE + EF + FA : MN + NO + OP + PQ + QR + RM :: AB : MN$;
c'est-à-dire, que le contour du premier Polygone est au contour du second, comme un côté du premier est à un côté homologue du second. Ce qu'il falloit démontrer.

C O R O L L A I R E I.

296 Donc les contours de deux Polygones semblables sont entr'eux comme les Lignes homologues FG , RS , qui se terminent à des Points semblablement placés : car ces contours sont en même raison que les côtés homologues AB , MN (N^o. 295.) ; & ces côtés homologues sont proportionnels aux Lignes homologues FG , RS (N^o. 294.).

Fig. 219;
220 ou 221
& 222.

C O R O L L A I R E II.

297 Soit que deux Polygones semblables $ABCDEF$, $MNOPQR$, soient inscrits dans des Cercles, soit qu'ils aient seulement trois An-

Fig. 223;
224, 225
& 226.

228 *Liv. IV. Chap. IV. DES RAPPORTS*
 gles correspondans aux Circonférences de ces Cercles, les circuits de ces Polygones seront proportionnels aux Rayons de leurs Cercles. Car les contours de ces Polygones sont proportionnels à leurs côtés homologues AB, MN (N^o. 295.) ; & les Rayons étant terminés par des Points semblablement placés dans les Polygones, ces côtés homologues sont proportionnels aux Rayons des Cercles dont il s'agit ici.

Comme les Rayons sont proportionnels aux Diamètres, c'est-à-dire, au double des mêmes Rayons, il suit encore que les circuits des mêmes Polygones sont proportionnels aux Diamètres de leurs Cercles.

COROLLAIRE III.

Fig. 228 & 229, ou 230 & 231. 298 Soit que deux Polygones semblables $ABCDEF, abcdef$, soient circonscrits à des Cercles, soit que les Cercles ne soient touchés que par trois côtés correspondans de ces Polygones, les contours de ces Polygones seront proportionnels aux Rayons KN, kn , de ces Cercles : puisque les contours de ces Polygones sont proportionnels à leurs côtés homologues AB, ab (N^o. 295.) ; & que les Centres des Cercles étant (N^o. 288.) semblablement placés dans les deux Polygones, les côtés homologues AB, ab , sont proportionnels aux Rayons KN, kn .

Comme les Rayons sont proportionnels au double des mêmes Rayons, c'est-à-dire, à leurs Diamètres, il suit encore que les circuits des mêmes Polygones sont proportionnels aux Diamètres de leurs Cercles.

COROLLAIRE IV.

299 Les Circonférences de deux Cercles sont entr'elles comme leurs Rayons, ou comme leurs Diamètres.

Car deux Polygones réguliers semblables d'une infinité de côtés, inscrits ou circonscrits à des Cercles, different infiniment peu de ces Cercles : ainsi ces Polygones d'une infinité de côtés, & leurs Cercles inscrits ou circonscrits, peuvent être pris les uns pour les autres. Mais les contours de ces Polygones semblables tous deux inscrits, ou tous deux circonscrits à des Cercles, sont entr'eux comme les Rayons ou comme les Diametres de ces Cercles. Donc les Circonférences des Cercles qui different infiniment peu des contours de ces Polygones, sont aussi entr'elles comme les mêmes Rayons, ou comme les mêmes Diametres; & sont par conséquent proportionnels à leurs propres Rayons, ou à leurs propres Diametres.

S C H O L I E.

Ce Théorème & ses Corollaires sont le fondement de l'Addition, de la Soustraction, de la Multiplication, & de la Division des contours des Figures semblables, dans le cas où l'on veut que la Figure résultante soit semblable à celles qui sont proposées.

I.

300 Si l'on veut avoir une Figure *Z* dont le contour soit égal à la somme des contours de deux Figures *X*, *Y*, qui lui sont semblables, & dont *AB*, *CD*, sont deux Lignes homologues; on prendra une Droite *EF* égale à la somme *AB + CD* des deux côtés homologues des Figures *X*, *Y*. Puis sur *EF* considérée comme Ligne homologue à *AB*, *CD*, l'on construira (N°. 270.) un Polygone *Z*, semblable aux deux donnés *X* & *Y*: & le contour de ce nouveau Polygone *Z* sera égal à la somme des contours des deux Polygones proposés *X* & *Y*.

Fig. 239;
240, 241,
ou 242,
243, 244,
ou 245,
246, 247.

Car les contours des Polygones semblables Z , X , Y , sont proportionnels à leurs Lignes homologues EF , AB , CD . Mais par construction $EF = AB + CD$. Donc le contour du Polygone Z est égal à la somme des contours des deux autres Polygones X , Y .

I I.

301 Si l'on demande un Polygone X dont le contour soit égal à la différence des contours de deux Polygones Z , Y , qui lui sont semblables, & dont EF , CD , sont deux Lignes homologues ; on prendra une Droite AB , égale à la différence $EF - CD$ des Lignes homologues des Figures données. Puis sur cette Droite AB , considérée comme Ligne homologue à EF ou CD , l'on construira un Polygone X semblable à l'un Z ou Y des deux Polygones donnés : & le contour de ce nouveau Polygone X sera égal à la différence des contours des deux autres Polygones Z , Y .

Car puisque $AB = EF - CD$, l'on aura $AB + CD = EF$. Ainsi la somme des contours des deux Polygones X , Y , sera égale au contour du Polygone Z . Donc en retranchant de chaque membre de cette Égalité le contour du Polygone Y , il restera le contour du Polygone X égal au contour du Polygone Z moins le contour du Polygone Y , c'est-à-dire, égal à la différence des contours des deux Polygones donnés Z & Y .

I I I.

Fig. 240,
241, ou
243, 244,
ou 246,
247.

302. Lorsqu'on voudra avoir un Polygone Z dont le contour soit multiple du contour d'un Polygone semblable Y , on prendra une Droite EF , qui soit également multiple d'une Ligne CD du Polygone

Y. Puis sur cette Droite EF , considérée comme Ligne homologue à CD , l'on construira un Polygone Z semblable au Polygone donné Y : & le contour de ce nouveau Polygone Z sera autant multiple du Polygone donné Y , que la Ligne EF le sera de la Ligne CD ; puisque le contour du Polygone Z sera à celui du Polygone Y , comme EF est à CD .

I V.

303 Enfin si l'on veut partager le contour du Polygone Z en raison donnée, & faire de ses parties les contours d'autres Polygones X & Y semblables à Z , on partagera une Ligne EF du Polygone Z dans la raison donnée. Puis ayant fait deux Droites AB , CD , égales aux parties de EF , on construira sur elles, comme sur des Lignes homologues à EF , des Polygones X & Y semblables à Z : & les contours de ces nouveaux Polygones seront les parties demandées du contour du Polygone Z .

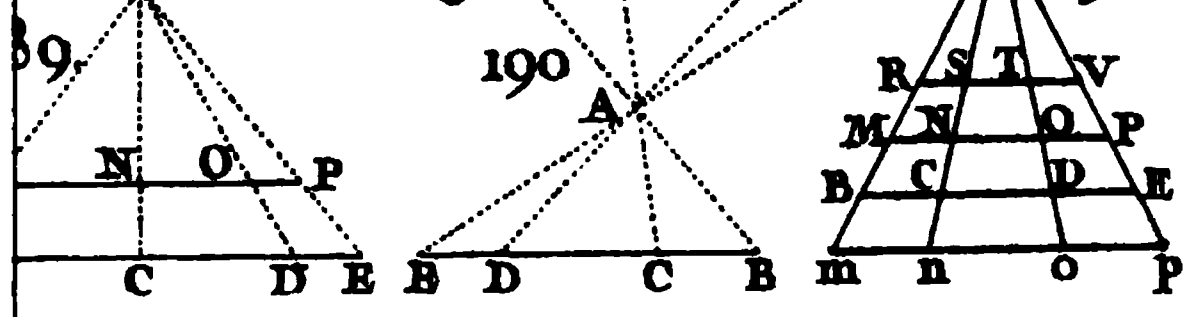
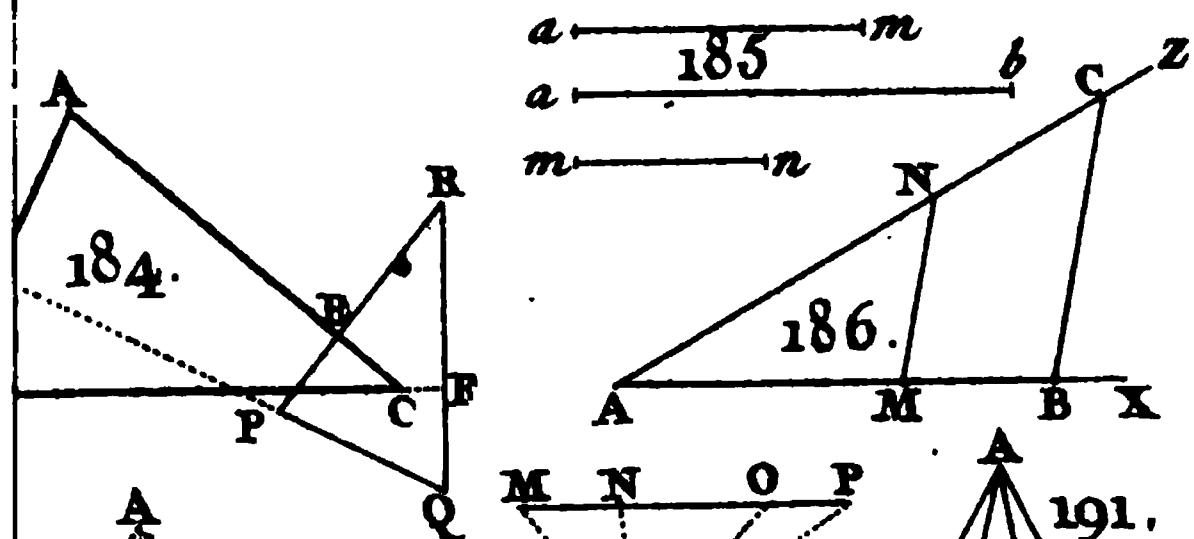
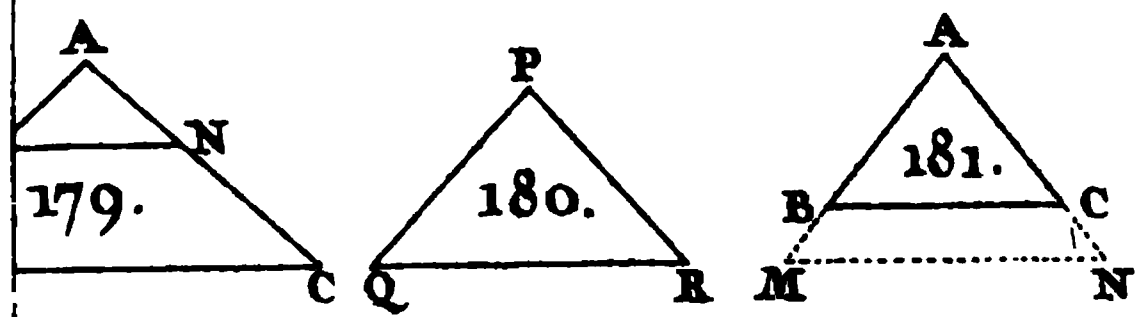
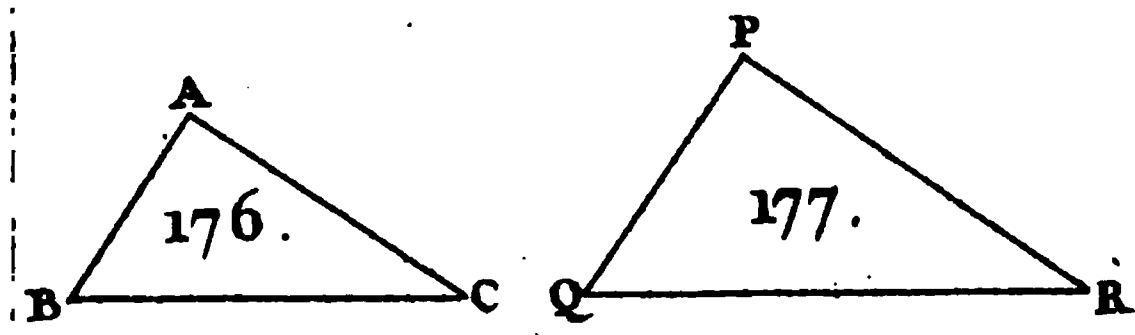
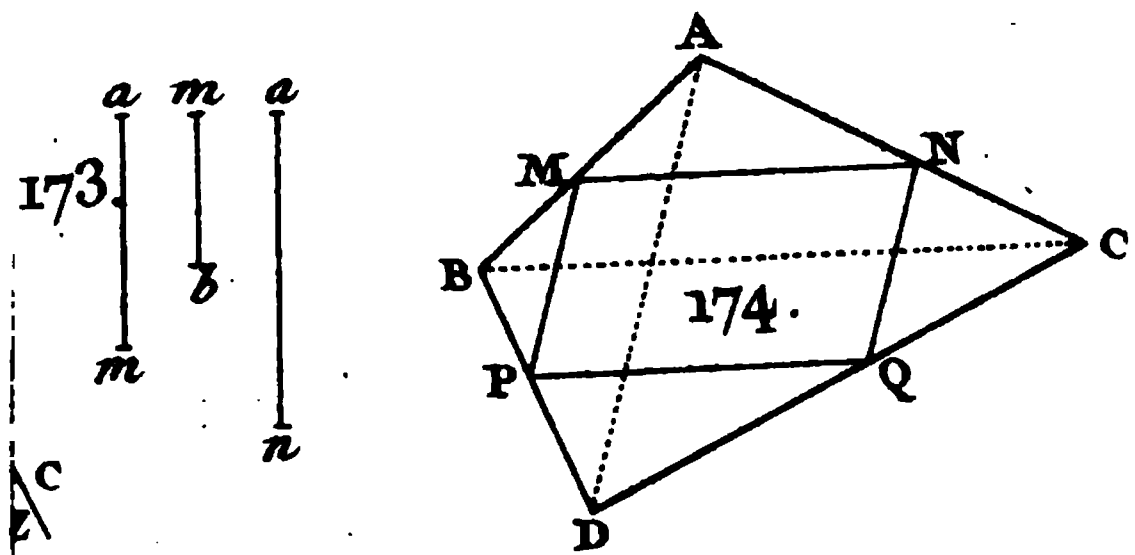
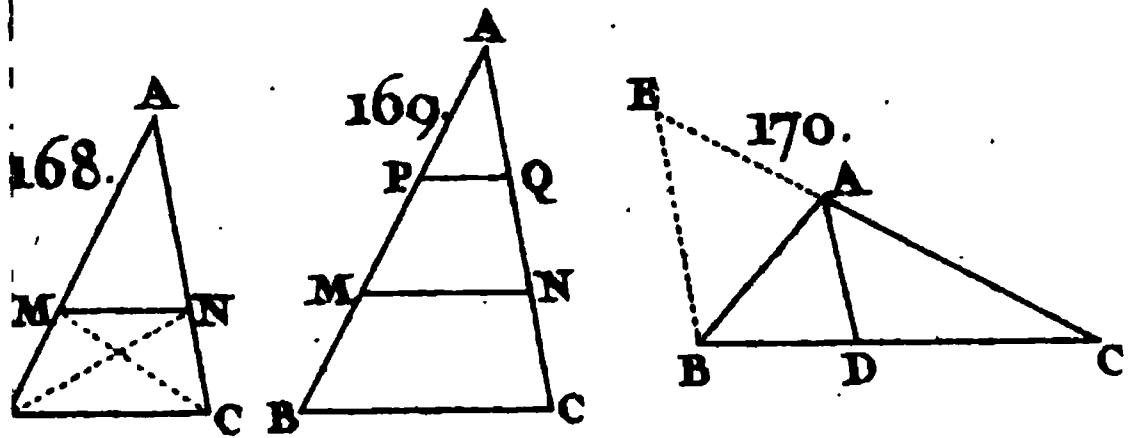
Fig. 239,
240, 241,
ou 242,
243, 244,
ou 245,
246, 247.

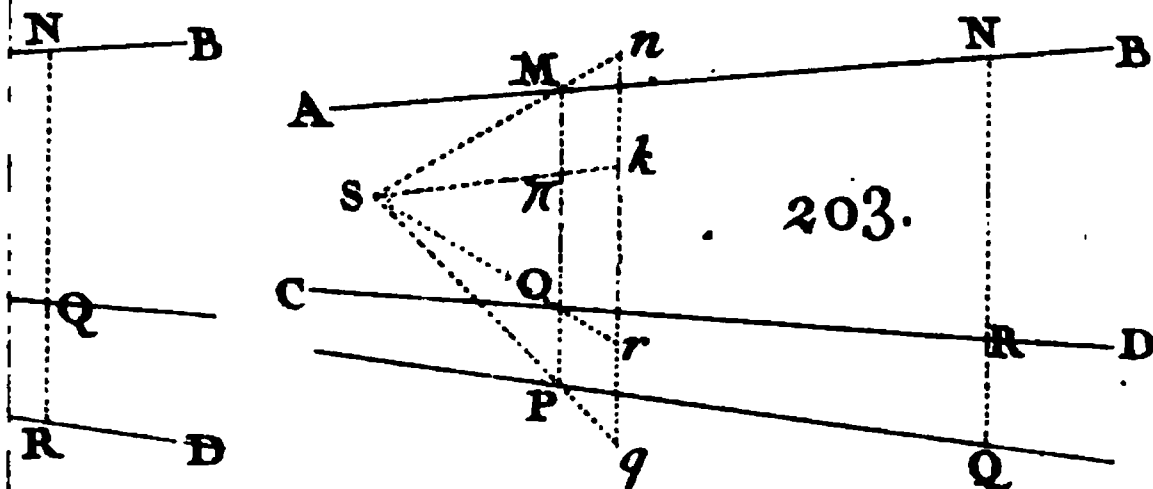
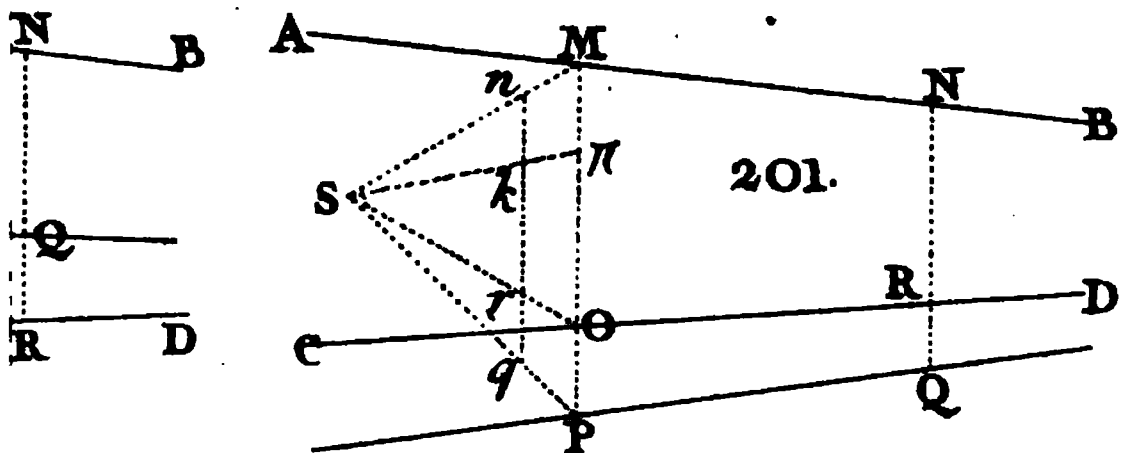
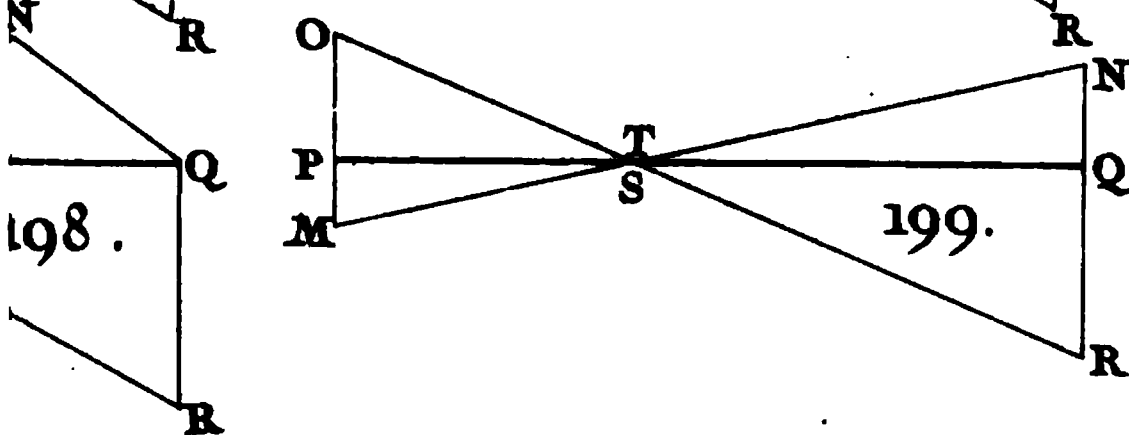
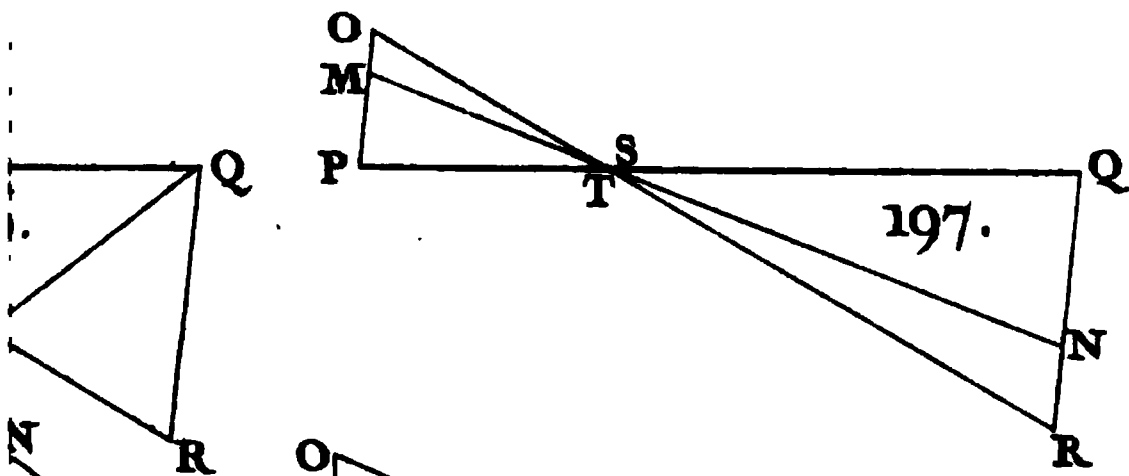
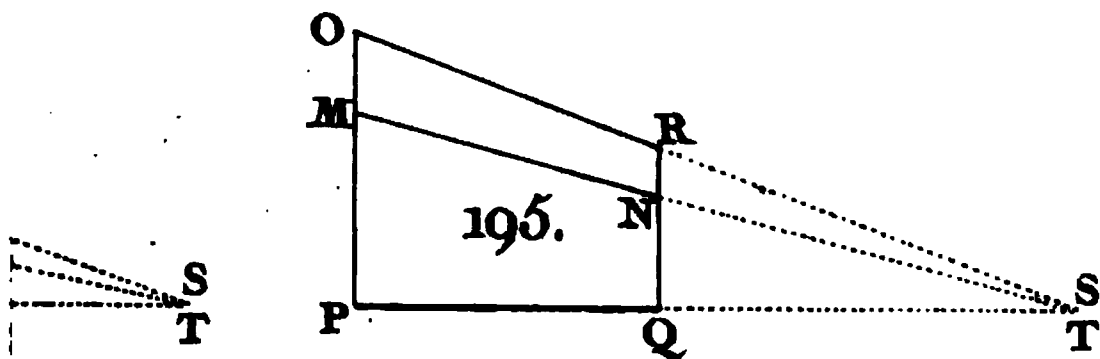
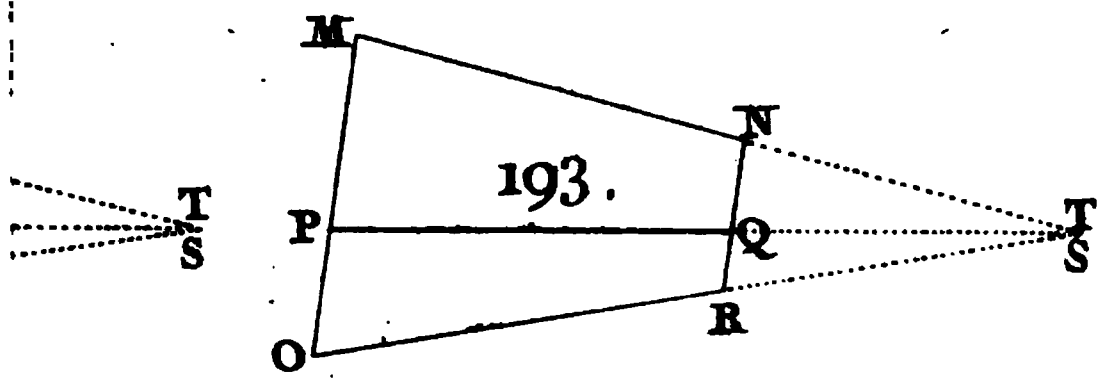
Premièrement, les contours des Polygones X & Y seront ensemble égaux au contour du Polygone Z ; puisque $AB + CD = EF$. Secondement, les deux Polygones X & Y auront des contours proportionnels à leurs Lignes homologues AB , CD , qui sont égales aux parties dans lesquelles on a partagé EF suivant le rapport demandé. Ainsi le contour du Polygone Z est partagé dans la raison donnée, aux deux Polygones X , Y , semblables à Z .

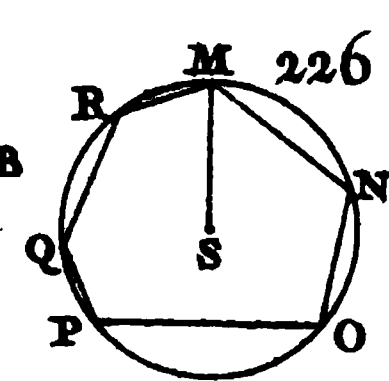
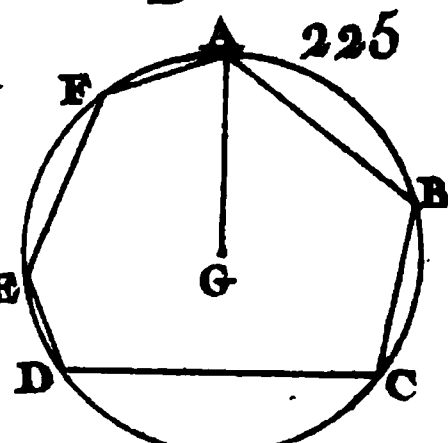
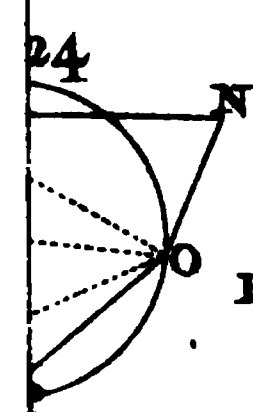
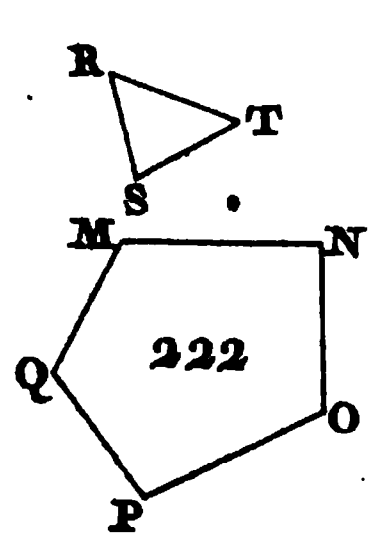
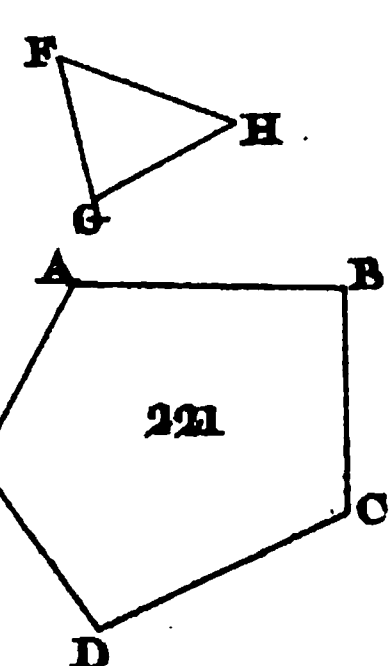
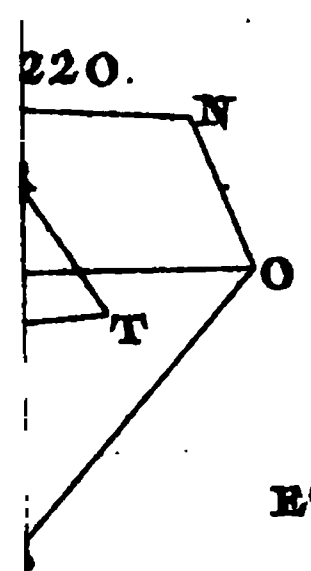
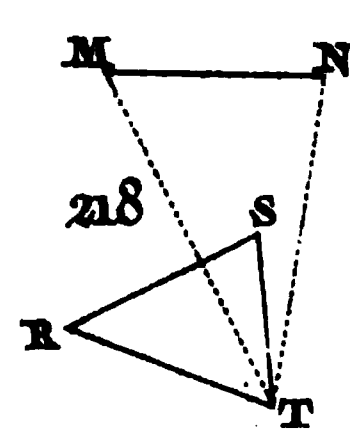
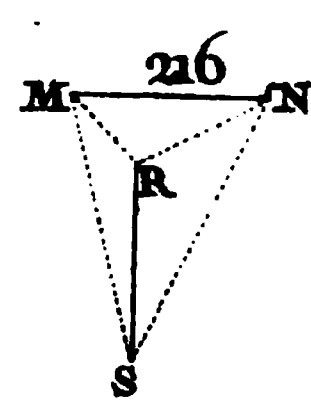
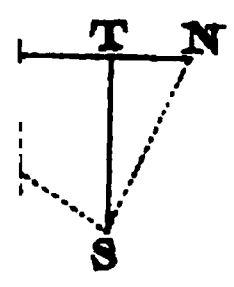
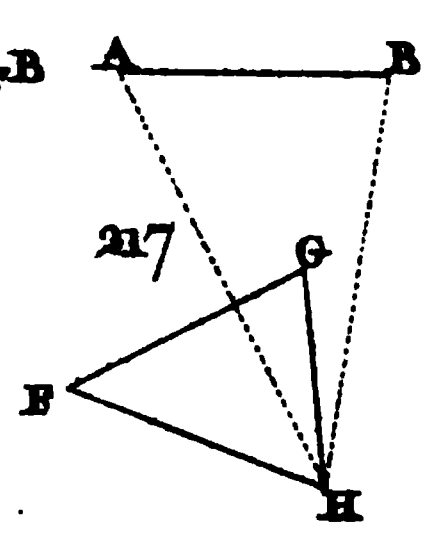
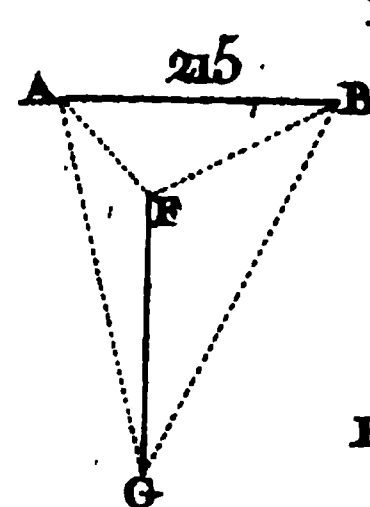
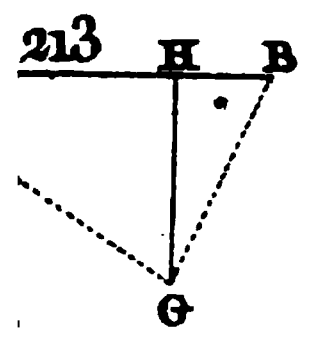
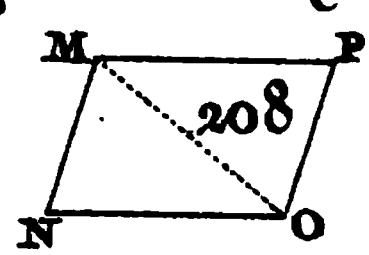
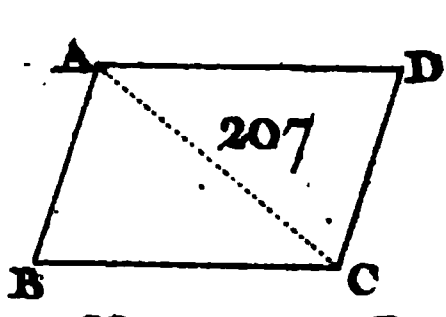
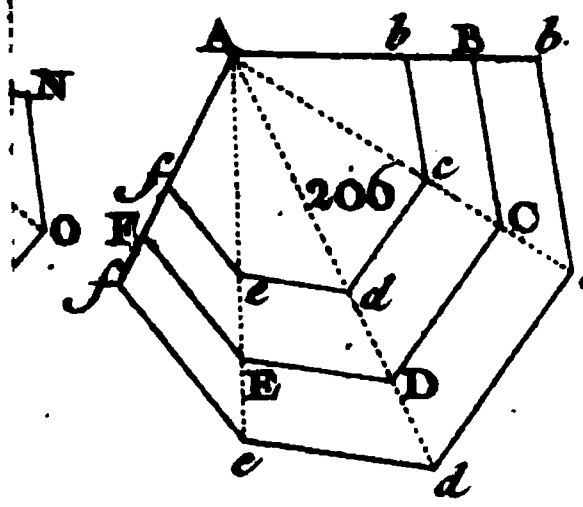
Avertissement.

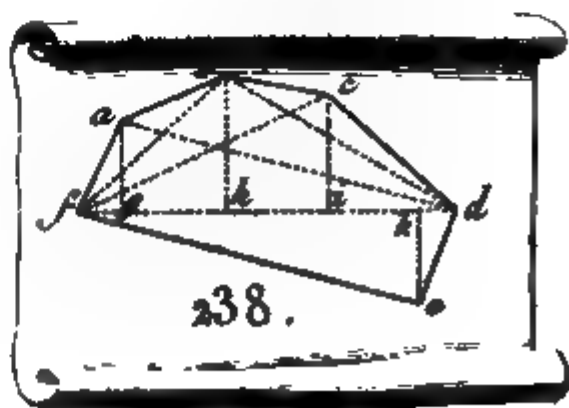
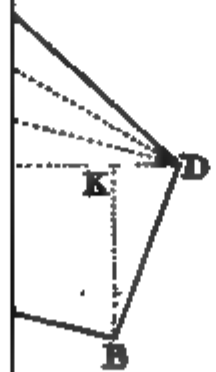
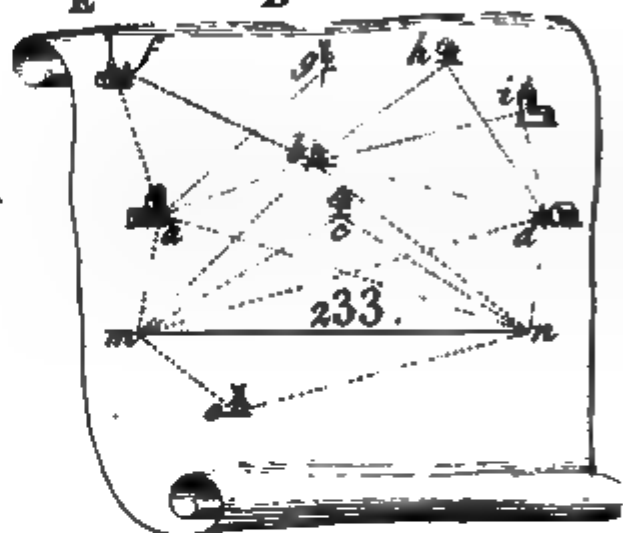
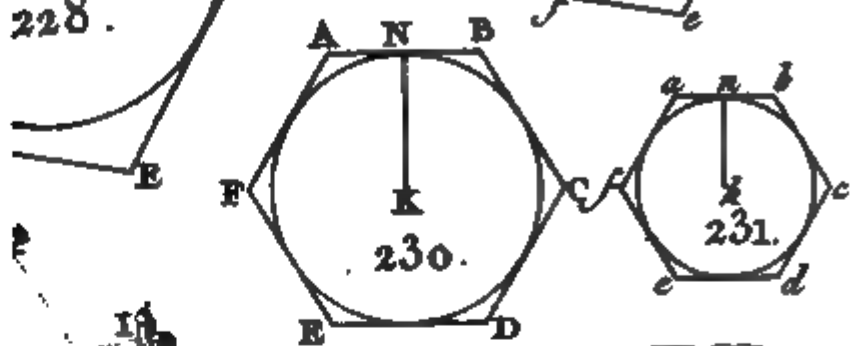
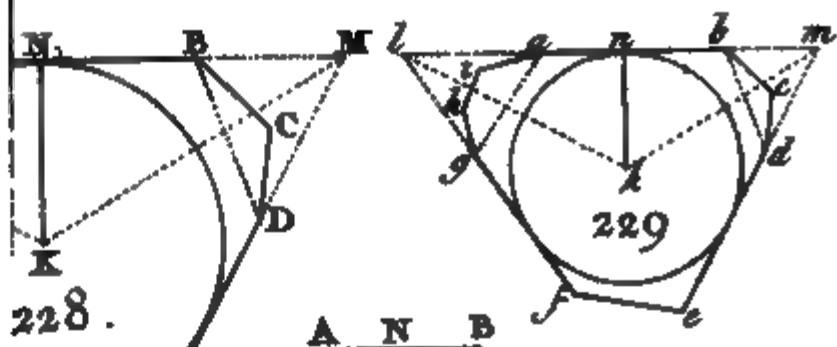
304 Si les Figures sur lesquelles il faudra opérer sont de simples Polygones semblables, leurs côtés homologues seront les Lignes homologues les plus

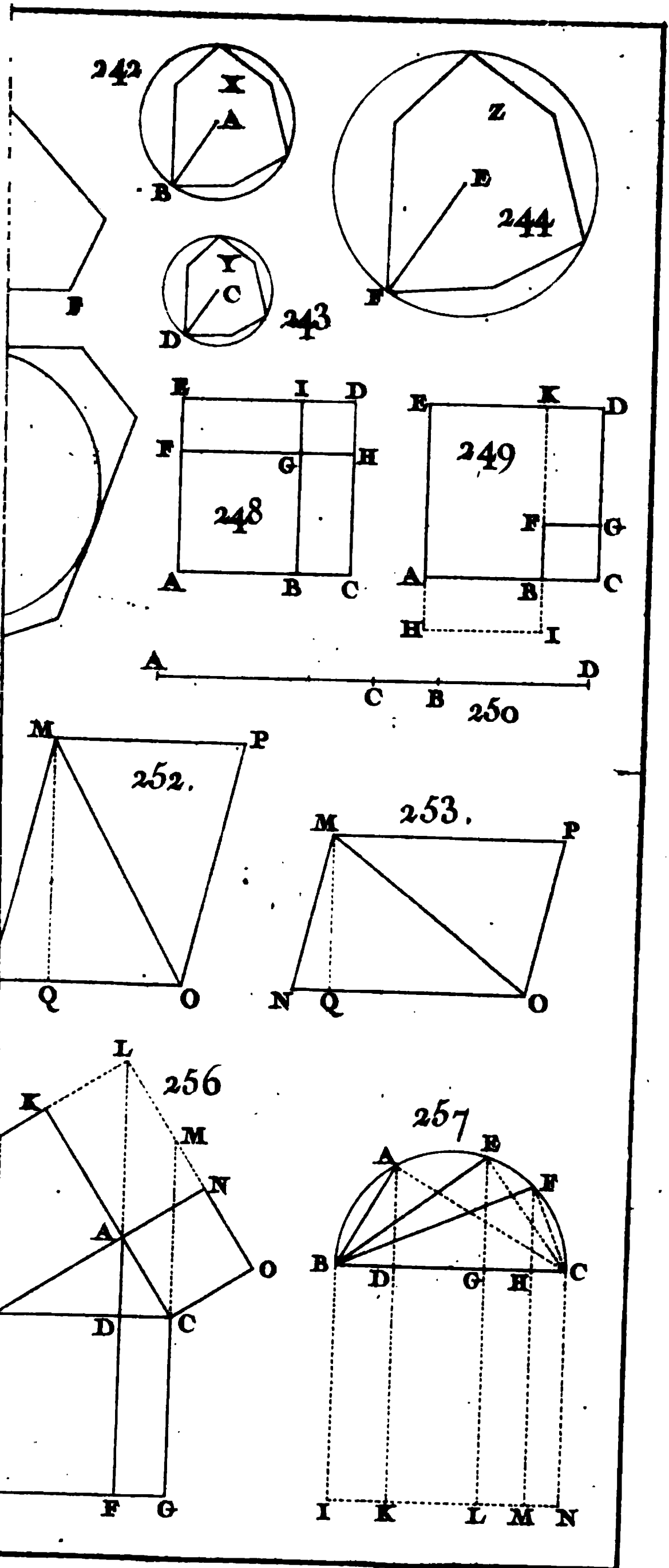
232 *Liv. IV. Chap. IV. DES RAPPORTS &c.*
commodes à employer. Mais si les Figures sembla-
bles sont inscrites ou circonscrites à des Cercles,
ou ont une liaison immédiate avec des Cercles, ou
sont elles-mêmes des Cercles, il sera très-commode
de prendre les Rayons de ces Cercles pour Lignes
homologues.











ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE THÉORIQUE ET PRATIQUE.



LIVRE V.

Des Rapports des Surfaces des Parallélogrammes, des Triangles, & des Figures semblables.

CHAPITRE PREMIER.

Des Rapports de la valeur des Quarrés, relativement aux Lignes ou portions de Ligne sur lesquelles ces Quarrés sont construits.

305

IN a démontré (No. 146.) que si les côtés contigus d'un Parallélogramme rectangle sont évalués en mesures égales quelconques, & qu'on multiplie le nombre des mesures contenues dans la base par le nombre des mesures contenues dans le côté contigu à cette base,

Le produit est le nombre des mesures quarrées contenues dans la surface de ce Parallélogramme ; & l'on a fait voir que chacune de ces mesures quarrées a pour côté la mesure dont on s'est servi pour déterminer la longueur des côtés contigus du Rectangle : & comme un Quarré est un Parallélogramme rectangle dont tous les côtés sont égaux , il est clair qu'en multipliant par lui-même le nombre des mesures contenues dans le côté d'un Quarré , on aura le nombre des mesures quarrées contenues dans ce Quarré.

Or les Quarrés sont entr'eux comme les nombres des mesures égales qu'ils contiennent. Ainsi quand on voudra connoître le Rapport de deux Quarrés dont les côtés seront évalués en mesures égales , il faudra multiplier par lui-même le nombre de mesures contenu dans un côté de chacun d'eux ; & l'on aura deux produits numériques qui seront en même rapport que ces Quarrés.

Par exemple , si l'on veut savoir en quel rapport sont deux Quarrés dont le premier a 2 mesures , & le second 3 mesures dans son côté , c'est-à-dire , dont les côtés sont comme 2 & 3 , on multipliera les deux nombres 2 & 3 chacun par lui-même ; & l'on aura deux produits quarrés numériques 4 & 9 , qui seront en même rapport que les deux Quarrés proposés.

Si l'on veut savoir en quel rapport sont deux Quarrés construits , l'un sur le Rayon , & l'autre sur le Diametre d'un Cercle ; comme le Diametre est double du Rayon , c'est-à-dire , que le Rayon est au Diametre comme 1 est à 2 , on multipliera les deux nombres 1 & 2 chacun par lui-même ; & les produits 1 & 4 qu'on trouvera seront en même rapport que les deux Quarrés construits , l'un sur le Rayon , l'autre sur le Diametre d'un même Cercle. On fera la même

chose pour tous les autres Quarrés donc on voudra connoître les Rapports en nombres.

T H É O R È M E.

306 Soit une Droite AC coupée en deux parties quelconques AB, BC : le Quarré de la Droite entière AC , sera composé du Quarré de sa première partie AB , du Quarré de sa seconde partie BC , & de deux Rectangles qui auront chacun pour côtés contigus les deux parties AB, BC ; c'est-à-dire, qu'on aura $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BC$. Fig. 248.

D É M O N S T R A T I O N.

Soit construit sur AC un Quarré $ACDE$: & ayant pris sur le côté AE une partie $AF = AB$, ou une partie $FE = BC$, soient menées les Droites FH, BI , parallèlement aux côtés AC, AE . Il est évident que le Quarré $ACDE$ construit sur AC , contiendra les quatre Rectangles AG, GD, BH, FI , qui sont faciles à connoître relativement aux parties AB, BC , de la Droite AC .

1°. Comme on a fait $AF = AB$, le premier Rectangle AG est le Quarré de la première partie AB de la Droite AC .

2°. Comme GH & GI sont égales aux deux parties égales BC, FE , le second Rectangle GD est un Quarré égal à celui de BC .

3°. Puisque AF ou $BG = AB$, le troisième Rectangle BH a les côtés contigus égaux aux deux parties AB, BC , de la Droite AC : ainsi ce Rectangle $BH = AB \times BC$ (N°. 146.).

4°. Puisque $FG = AB$ & $FE = BC$, le Rectangle $FI = AB \times BC$.

Donc le Quarré $ACDE$ construit sur la Droite AC divisée en deux parties quelconques AB, BC ,

est composé du Quarré de la premiere partie AB ; du Quarré de la seconde partie BC , & de deux Rectangles, dont les côtés contigus sont égaux aux deux parties AB, BC ;

C'est-à-dire, que $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2 AB \times BC$.
Ce qu'il falloit démontrer.

T H É O R È M E.

Fig. 248. 307 Une Droite AC étant divisée en deux parties quelconques AB, BC , le Quarré de l'une AB de ses parties, vaut le Quarré de la Ligne entiere AC , plus le Quarré de l'autre partie BC , moins deux Rectangles qui ont chacun pour côtés contigus la Droite entiere AC , & sa partie BC .

C'est-à-dire, que $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 AC \times BC$.

D É M O N S T R A T I O N.

Après avoir construit un Quarré $ACDE$ sur la Ligne entiere AC , qu'on fasse $AF = AB$, ou $FE = BC$; & qu'on mene les Droites FH, BI , parallèles aux côtés AC, AE , du Quarré $ACDE$: on prouvera, comme dans le Théorème précédent, que AG, GD , sont les Quarrés des deux parties AB, BC , de la Droite AC ; & que les deux Rectangles BD, FD , ont des côtés contigus égaux à la Ligne AC & à sa partie BC ; d'où il suit (N^o. 146.) que chacun de ces Rectangles BD, FD , doit être exprimé par $AC \times BC$.

Or il est visible que l'excès du Quarré $ACDE$ sur le Quarré AG , est composé des deux Rectangles BD, FI . Si l'on ajoute encore le Quarré GD au Quarré $ACDE$, l'excès de la somme de ces Quarrés sur le Quarré AG , sera composé des deux Rec-

angles BD , FI , & du Quarré GD : & comme le Rectangle FI & le Quarré GD composent ensemble le Rectangle FD , il est clair que l'excès de la somme des Quarrés $ACDE$, GD , sur le Quarré AG , sera composé des deux Rectangles égaux BD , FD , ou sera égal au double du Rectangle BD .

On aura donc le Quarré AG construit sur AB , en retranchant des deux Quarrés construits sur AC & sur BC , la quantité $2 AC \times BC$, ou le double du Rectangle BD , dont les côtés contigus IB , BC , sont égaux à la Ligne AC , & à sa partie BC ; c'est-à-dire, qu'on aura $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 AC \times BC$.

Ce qu'il falloit démontrer.

R E M A R Q U E.

308 La partie AB de la Droite AC étant égale à $AC - BC$, il est clair que la Quantité $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 AC \times BC$, qu'on a trouvée pour la valeur du Quarré de AB , est le Quarré de $AC - BC$. Ainsi le Quarré de la différence $AC - BC$ de deux Lignes, contient la somme $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ des Quarrés de ces deux Lignes moins $2 AC \times BC$, c'est-à-dire, moins deux fois le produit de l'une de ces Lignes multipliée par l'autre.

Or on a trouvé (N°. 306.) que le Quarré d'une Droite AC , ou de la somme $AB + BC$ de ses parties, contient aussi la somme $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ des Quarrés de ses deux parties plus $2 AB \times BC$, c'est-à-dire, plus deux fois le produit de l'une de ses parties multipliée par l'autre.

On reconnoitra donc que trois termes parmi lesquels il y aura deux Quarrés positifs de deux Lignes,

avec le double du produit positif ou négatif de l'une de ces Lignes multipliée par l'autre, composeront le Carré de la somme ou de la différence de ces deux Lignes, suivant que le double produit de ces Lignes sera positif ou négatif; c'est-à-dire, suivant que ce double produit aura le Signe + de l'Addition, ou le Signe - de la Soustraction.

On reconnoîtra, par exemple, que les trois termes $\overline{A^2B} + \overline{B^2C} + 2AB \times BC$, parmi lesquels sont les deux Carrés positifs $\overline{A^2B} + \overline{B^2C}$ de deux Lignes AB, BC , avec le double produit positif $2AB \times BC$ de ces deux Lignes, composent le Carré de la somme $AB + BC$ de ces deux Lignes.

On reconnoîtra aussi que les trois termes $\overline{A^2B} + \overline{B^2C} - 2AB \times BC$, parmi lesquels sont les Carrés vrais ou positifs $\overline{A^2B} + \overline{B^2C}$ de deux Lignes AB, BC , avec le double produit négatif $-2AB \times BC$ des deux mêmes Lignes, composent le Carré de la différence $AB - BC$ de ces deux Lignes.

309 On rencontre souvent des Carrés qui sont négatifs, c'est-à-dire, qui sont retranchés de quelque autre Quantité. Ces Carrés négatifs ayant leurs Signes contraires à ceux des Carrés vrais ou positifs, il est aisé de les distinguer.

Par exemple, $-\overline{A^2C}, -\overline{A^2B}, -\overline{B^2C}$, ayant devant eux le Signe - de Soustraction, contraire au Signe + d'Addition que les véritables Carrés $\overline{A^2C}, \overline{A^2B}, \overline{B^2C}$, des Lignes AC, AB, BC , auroient ou seroient réputés avoir devant eux, sont des Carrés négatifs ou retranchés de quelque autre Quantité.

Les trois termes $-\overline{A^2B} - \overline{B^2C} - 2AB \times BC$, qui

ont tous le Signe — opposé au Signe +, qui est devant les trois termes $\overline{AB} + \overline{BC} + 2AB \times BC$ du véritable Quarré de la somme $AB + BC$ de deux Lignes, est le Quarré négatif de $AB + BC$.

Les trois termes — $\overline{AB} - \overline{BC} + 2AB \times BC$, qui sont exactement contraires aux trois termes $\overline{AB} + \overline{BC} - 2AB \times BC$, dont le Quarré de la différence $AB - BC$ de deux Lignes est composé, sont le Quarré négatif de $AB - BC$.

THÉOREME.

310 *La différence de deux Quarrés construits sur deux Droites AC , BC , est égale au produit fait de la somme de ces Lignes & de la différence de ces mêmes Lignes; c'est-à-dire, que $\overline{AC} - \overline{BC} = (AC + BC) \times (AC - BC)$.* Fig. 249.

DÉMONSTRATION.

Ayant placé la Droite BC sur la Droite AC , soient construits sur elles deux Quarrés $ACDE$, $BCGF$, qui aient un Angle commun. Puis ayant prolongé le côté AE du premier Quarré, d'une quantité $AH = BC$, soit menée par le Point H parallèlement à AC , une Droite HI , qu'on terminera par le prolongement du côté BF du second Quarré. Enfin soit encore prolongé le côté BF jusqu'en K .

Puisque (Construction) $AC = CD$, & $BC = CG$, en retranchant la seconde Égalité de la première, on aura $AB = GD$: & comme on a fait $AH = BC$ ou FG , les deux Rectangles HB , FD , auront des côtés contigus égaux chacun à chacun, & seront par conséquent égaux. Ainsi en ajoutant à chacun d'eux le Rectangle AK , on aura $HB + AK$ ou $HK = FD + AK$.

Or $FD + AK$ est la différence des deux Quarrés $ACDE$, $BCGF$, construits sur AC & sur BC . Ainsi HK est aussi la différence des deux mêmes Quarrés ; c'est-à-dire, que $ACDE - BCGF$ ou $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = HK$ ou $= EH \times AB$.

Mais 1°. $EH = AB + BC$; puisque (Construction) $AE = AC$ & $AH = BC$. 2°. $AB = AC - BC$;

Donc $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = (AC + BC) \times (AC - BC)$.
Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Fig. 250. 311 Lorsqu'une Ligne droite AD est coupée en deux parties égales en C , & en deux parties inégales en B , le Quarré de sa moitié AC moins le Quarré de la partie moyenne BC , est égal au produit des deux parties inégales AB , BD ; c'est-à-dire, que $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = AB \times BD$.

Car AB est la somme $AC + BC$ des deux Lignes AC , BC ; & puisque $CD = AC$, on a BD ou $CD - BC = AC - BC$. Ainsi BD est la différence des deux mêmes Lignes AC , BC .

Donc puisque (N°. 310.) on a

$$\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = (AC + BC) \times (AC - BC) :$$

on aura aussi $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = AB \times BD$.

REMARQUE.

312 Lorsque deux Quarrés tels que \overline{AC}^2 & \overline{BC}^2 , sont exprimés chacun par un seul terme, il est aisé de reconnoître la somme $AC + BC$ & la différence $AC - BC$ de leurs Racines ; & l'on voit tout d'un coup (N°. 310.) que la différence $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$ de ces Quarrés

Quarrés, est le produit de la multiplication de $AC + BC$ par $AC - BC$.

Lorsque l'un des deux Quarrés sera composé de plusieurs termes, & que l'un sera soustrait de l'autre; il ne sera guères plus difficile d'apercevoir la somme & la différence de leurs Racines, si l'on a bien conçu ce que nous avons dit (N^o. 309.) des Quarrés négatifs ou soustraits de quelque autre quantité.

Par exemple, si l'on a $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BC - \overline{AC}^2$, on verra aisément que $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BC$ est un vrai Quarré dont la Racine est $AB + BC$, & que $-\overline{AC}^2$ est un Quarré négatif ou soustrait du premier; en sorte que $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BC - \overline{AC}^2$ est la différence de deux Quarrés, dont la somme des Racines est $AB + BC + AC$, & dont la différence des Racines est $AB + BC - AC$. Ainsi $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BC - \overline{AC}^2$ est le produit de la multiplication de $AB + BC + AC$ par $AB + BC - AC$ (N^o. 310.).

Si l'on avoit $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 + 2AB \times BC$, on reconnoîtroit que \overline{AC}^2 est un vrai Quarré dont la Racine est AC , & que le reste $-\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 + 2AB \times BC$ est un Quarré négatif contraire au vrai Quarré $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2AB \times BC$, dont la Racine est $AB - BC$. Ainsi l'on verroit aisément que la somme des Racines de ces Quarrés seroit $AC + AB - BC$; que la différence des mêmes Racines seroit $AC - AB + BC$; & que $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 + 2AB \times BC$ seroit par conséquent le produit de $AC + AB - BC$ multiplié par $AC - AB + BC$.

Si le dernier article pouvoit faire quelque pei-

ne, ce ne seroit point par rapport à la somme $AC + AB - BC$ des deux Racines, dont l'une est AC & l'autre $AB - BC$; & toute la difficulté se réduiroit à prendre la différence de ces Racines, c'est-à-dire, à soustraire la Racine $AB - BC$ du Carré négatif, de la Racine AC du Carré positif. Mais cette soustraction deviendra facile, si au lieu de AC l'on prend $AC + AB - BC - AB + BC$, qui n'en est point différent. Car alors on n'aura aucune peine à en soustraire $AB - BC$; & le reste sera évidemment $AC - AB + BC$.

Par la même raison, si l'on trouve $\overline{AB} \times (2BC)^2 - (\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC})^2$, on verra aisément que $\overline{AB} \times (2BC)^2$ est un vrai Carré, dont la Racine est $AB \times 2BC$, & que $-(\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC})^2$ est un Carré négatif contraire au vrai Carré $(\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC})^2$, dont la Racine est $\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC}$. Ainsi l'on reconnoitra que la somme des Racines de ces Carrés est $AB \times 2BC + \overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC}$, & que la différence des mêmes Racines est $AB \times 2BC - \overline{AB} - \overline{BC} + \overline{AC}$.

Enfin l'on conclurra (N^o. 310.) que la Quantité $\overline{AB} \times (2BC)^2 - (\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC})^2$ est le produit de la multiplication de $AB \times 2BC + \overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC}$ par $AB \times 2BC - \overline{AB} - \overline{BC} + \overline{AC}$.

Comme on fera souvent usage des trois derniers Théorèmes dans la suite de ces Éléments, & dans toutes les parties des Mathématiques traitées synthétiquement, il est nécessaire de les bien savoir, & de les avoir présens à l'esprit, pour les appliquer à propos.

CHAPITRE II.

*Des Rapports des Surfaces des Parallélogrammes;
des Triangles, & des Figures semblables
en général.*

DANS tout ce Chapitre on entendra par Triangle, Parallélogramme & Polygone, la surface même de ces Figures; & lorsqu'il s'agira de leurs côtés, on le dira expressément.

THÉORÈME.

313 Deux Parallélogrammes quelconques $ABCD$, $MNOP$, semblables ou non semblables, sont entr'eux *Fig. 251 & 252.* comme les produits de leurs bases & de leurs hauteurs.

DÉMONSTRATION.

Les Parallélogrammes $ABCD$, $MNOP$, sont égaux aux produits $BC \times AE$, $NO \times MQ$, de leurs bases & de leurs hauteurs (N^o. 142.); ainsi ils sont entr'eux comme ces produits. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

314 Donc deux Triangles quelconques BAC , NMO , sont aussi entr'eux comme les produits *Fig. 251 & 252.* $BC \times AE$, $NO \times MQ$, de leurs bases & de leurs hauteurs. Car ces Triangles sont les moitiés de ces produits (N^o. 144.); & les moitiés sont entr'elles comme les tous,

T H É O R È M E.

Fig. 251 & 252. **315** Les Parallélogrammes $ABCD$, $MNOP$, qui ont un Angle égal, & par conséquent tous les Angles égaux chacun à chacun, sont entr'eux comme les produits des côtés adjacens à l'Angle égal. Par exemple, si l'Angle $B=N$, on aura

$$ABCD : MNOP :: AB \times BC : MN \times NO.$$

D É M O N S T R A T I O N.

Des Angles égaux A & M , soient abaissées les Perpendiculaires AE , MQ , sur les côtés BC , NO , adjacens aux deux Angles égaux B , N ; les Triangles AEB , MQN , seront semblables (N^o. 254.). Car (*hyp.*) l'Angle $B=N$, & les Angles en E & Q seront droits (*Construction*), & par conséquent égaux. Ainsi l'on aura

$$AE : MQ :: AB : MN.$$

Mais $BC : NO :: BC : NO.$

Donc en multipliant par ordre, on aura

$$AE \times BC : MQ \times NO :: AB \times BC : MN \times NO.$$

Mais le Parallélogramme $ABCD = AE \times BC$,

Et le Parallélogramme $MNOP = MQ \times NO.$

Donc $ABCD : MNOP :: AB \times BC : MN \times NO.$

Ce qu'il falloit démontrer.

C O R O L L A I R E.

Fig. 251 & 252. **316** Donc deux Triangles BAC , NMO , qui ont un Angle égal, par exemple, l'Angle $B=N$, sont entr'eux comme les produits $AB \times BC : MN \times NO$ des côtés adjacens à l'Angle égal.

Car ces Triangles BAC , NMO , sont les moitiés

Des Parallélogrammes $ABCD$, $MNOP$, qui ont l'Angle $B=N$: ainsi ils sont en même rapport que ces Parallélogrammes; & par conséquent

$$BAC : NMO :: AB \times BC : MN \times NO.$$

THEOREME.

317 Deux Parallélogrammes semblables $ABCD$, $MNOP$, sont entr'eux comme les Quarrés de leurs côtés homologues; c'est-à-dire, que Fig. 251
& 253.

$$ABCD : MNOP :: \overline{AB}^2 : \overline{MN}^2.$$

DÉMONSTRATION.

Des Angles égaux A , M , soient abaissées les Perpendiculaires AE , MQ , sur les côtés homologues BC , NO : les Triangles AEB , MQN , seront semblables, car ils seront tous deux rectangles; & de plus l'Angle $B=N$, à cause que les Parallélogrammes sont semblables. On aura donc

$$AE : MQ :: AB : MN.$$

Mais puisque les Parallélogrammes $ABCD$, $MNOP$, sont semblables, on aura

$$BC : NO :: AB : MN.$$

Multipliant ces deux Proportions par ordre, on aura

$$AE \times BC : MQ \times NO :: \overline{AB}^2 : \overline{MN}^2.$$

Mais $ABCD = AE \times BC$, & $MNOP = MQ \times NO$ (N^o. 142.).

$$\text{Donc } ABCD : MNOP :: \overline{AB}^2 : \overline{MN}^2.$$

Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

318 Donc deux Triangles semblables BAC , NMO , sont entr'eux comme les Quarrés de leurs côtés homologues AB , MN . Car les Triangles Fig. 251
& 253.

246 Liv. V. Chap. II. DES RAPPORTS
semblables BAC , NMO , sont les moitiés des
Parallélogrammes semblables $ABCD$, $MNOP$.
Ainsi ils sont entr'eux comme ces Parallélogram-
mes, qui sont proportionnels aux Quarrés \overline{AB} , \overline{MN} ,
de leurs côtés homologues (N^o. 317.).

T H É O R È M E.

Fig. 254 & 255. 319 Les surfaces des Polygones semblables $ABCDE$,
 $MNOPQ$, sont entr'elles comme les Quarrés \overline{AB} , \overline{MN} ,
de leurs côtés homologues.

D É M O N S T R A T I O N.

De deux Points F, R , semblablement placés à l'é-
gard de deux côtés homologues AB , MN , des
deux Polygones, soient tirées des Droites à tous
les Angles. Comme ces Points F, R , seront sem-
blablement placés à l'égard de tous les autres côtés
homologues (N^o. 283.), les Triangles AFB , BFC ,
 CFD , DFE , EFA , seront semblables aux Trian-
gles MRN , NRO , ORP , PRQ , QRM , chacun à
chacun (N^o. 273.). Ainsi ces Triangles comparés
deux à deux seront entr'eux comme les Quarrés de
leurs côtés homologues (N^o. 317.). On aura donc

$$1^{\circ}. AFB : MRN :: \overline{AB} : \overline{MN}.$$

$$2^{\circ}. BFC : NRO :: BC : NO :: \overline{AB} : \overline{MN}; \text{ car } BC : NO :: AB : MN.$$

$$3^{\circ}. CFD : ORP :: CD : OP :: \overline{AB} : \overline{MN}; \text{ car } CD : OP :: AB : MN.$$

$$4^{\circ}. DFE : PRQ :: DE : PQ :: \overline{AB} : \overline{MN}; \text{ car } DE : PQ :: AB : MN.$$

$$5^{\circ}. EFA : QRM :: EA : QM :: \overline{AB} : \overline{MN}; \text{ car } EA : QM :: AB : MN.$$

Et par conséquent

$$\triangle AFB : \triangle MRN :: \triangle BFC : \triangle NRO :: \triangle CFD : \triangle ORP :: \triangle DFE : \triangle PRQ :: \triangle EFA : \triangle QRM.$$

Donc (N^o. 217.) $\triangle AFB + \triangle BFC + \triangle CFD + \triangle DFE + \triangle EFA$
 $: \triangle MRN + \triangle NRO + \triangle ORP + \triangle PRQ + \triangle QRM :: \triangle AFB : \triangle MRN$
 $:: \overline{AB}^2 : \overline{MN}^2$; c'est-à-dire, $ABCDE : MNOPQ :: \overline{AB}^2 : \overline{MN}^2$.
 Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

320 Donc deux Polygones semblables $ABCDE$, $MNOPQ$, sont entr'eux comme les Quarrés \overline{FG}^2 , \overline{RS}^2 , de deux Droites terminées par des Points semblablement placés à l'égard de ces Polygones. Fig. 254
& 255.

Car puisque les Droites FG , RS , sont terminées par des Points semblablement placés à l'égard de ces Polygones, ou à l'égard de deux de leurs côtés homologues quelconques AB , MN , on aura (N^o. 278.) $\overline{AB} : \overline{MN} :: \overline{FG} : \overline{RS}$; & par conséquent $\overline{AB}^2 : \overline{MN}^2 :: \overline{FG}^2 : \overline{RS}^2$.

Mais (N^o. 319.) $ABCDE : MNOPQ :: \overline{AB}^2 : \overline{MN}^2$.

Donc aussi $ABCDE : MNOPQ :: \overline{FG}^2 : \overline{RS}^2$.

COROLLAIRE II.

321 Donc deux Polygones semblables $ABCDEF$, $MNOPQR$, qui ont trois Angles correspondans à la Circonférence, sont entr'eux comme les Quarrés des Rayons, ou comme les Quarrés des Diametres de leurs Cercles. Fig. 223
& 224.

Car si l'on tire les Rayons GC , SO , aux Angles correspondans C , O ; comme les Centres G , S , sont des Points semblablement placés dans les deux Polygones (N^o. 285.), & que les sommets des Angles

Q iiij

248 *Liv. V. Chap. II. DES RAPPORTS*
correspondans C, O, y font aussi semblablement placés (N^o. 277.), on aura $AB:MN::GS:SO$ (N^o. 278.),
& par conséquent $\overline{AB}^2:\overline{MN}^2::\overline{GC}^2:\overline{SO}^2$.

Mais (N^o. 319.) $ABCDEF:MNOPQR::\overline{AB}^2:\overline{MN}^2$.

Donc aussi $ABCDEF:MNOPQR::\overline{GC}^2:\overline{SO}^2$;
c'est-à-dire, que les deux Polygones semblables $ABCDEF, MNOPQR$, sont proportionnels aux
Quarrés des Rayons de leurs Cercles.

Et comme les Quarrés des Rayons sont proportionnels aux Quarrés des Diametres, parce que les
Rayons sont proportionnels aux Diametres, il est clair
que les mêmes Polygones semblables $ABCDEF, MNOPQR$, sont aussi proportionnels aux Quarrés
des Diametres de leurs Cercles.

COROLLAIRE III.

Fig. 225 & 226. 322 Donc deux Polygones semblables $ABCDEF, MNOPQR$, inscrits dans des Cercles, sont aussi
entr'eux comme les Quarrés des Rayons, ou comme
les Quarrés des Diametres de leurs Cercles.

Car ces Polygones semblables étant supposés
inscrits dans des Cercles, ont au moins trois Angles
correspondans aux Circonférences de leurs Cercles, &
sont par conséquent dans le cas des Polygones du
Corollaire précédent.

COROLLAIRE IV.

Fig. 228 & 229. 323 Donc si deux Cercles sont touchés par trois
côtés homologues de deux Polygones semblables
 $ABCDEFGHI, abcdefghi$; ces Polygones se-
ront proportionnels aux Quarrés des Rayons, ou aux
Quarrés des Diametres de leurs Cercles.

Car si des Centres K, k, des deux Cercles, on mene
les Rayons KN, kn , aux Points d'attouchement N, n, de

deux côtés homologues, ces Rayons KN, kn , seront perpendiculaires sur les côtés AB, ab ; & (N^o. 276.) les Points N, n , seront semblablement placés par rapport à ces mêmes côtés. Ainsi (N^o. 278.) l'on aura $AB:ab::KN:kn$, & par conséquent $\overline{AB}:\overline{ab}::\overline{KN}:\overline{kn}$.

Mais les deux Polygones $ABCDEFGHI, abcdefghi$, étant semblables, on aura

$ABCDEFGHI:abcdefghi::\overline{AB}:\overline{ab}$.
Donc on aura aussi

$ABCDEFGHI:abcdefghi::\overline{KN}:\overline{kn}$;
c'est-à-dire, que les surfaces des deux Polygones dont il est question sont entr'elles comme les Quarrés des Rayons de leurs Cercles.

Et comme les Quarrés des Rayons sont proportionnels aux Quarrés des Diametres, les surfaces des mêmes Polygones seront aussi proportionnelles aux Quarrés des Diametres des mêmes Cercles.

COROLLAIRE V.

324 Donc les surfaces de deux Polygones semblables circonscrits à des Cercles, sont proportionnelles aux Quarrés de leurs Rayons, ou aux Quarrés de leurs Diametres. Car lorsque tous les côtés des Polygones semblables touchent des Cercles, il y a toujours dans ces deux Polygones au moins trois côtés homologues qui touchent ces Cercles. Ainsi ces Polygones sont entr'eux comme les Quarrés des Rayons, ou comme les Quarrés des Diametres de leurs Cercles (N^o. 323.).

COROLLAIRE VI.

325 Donc les surfaces de deux Cercles sont entr'elles comme les Quarrés de leurs Rayons, ou comme les Quarrés de leurs Diametres. Car deux

Cercles peuvent être regardés comme deux Polygones réguliers semblables, chacun d'une infinité de côtés, tous deux inscrits, ou tous deux circonscrits à des Cercles : & comme les surfaces des Polygones semblables, même d'une infinité de côtés, sont proportionnelles aux Quarrés des Rayons ou des Diametres des Cercles inscrits ou circonscrits, il est clair que les surfaces des Cercles, qui different infiniment peu de ces Polygones, sont aussi proportionnelles aux Quarrés de leurs Rayons ou de leurs Diametres.

CHAPITRE III.

Des Rapports des Figures semblables dont les côtés homologues forment un Triangle rectangle.

DÉFINITION.

LORSQU'UN Triangle est rectangle, le côté opposé à l'Angle droit s'appelle *Hypothénuse*.

THÉORÈME.

Fig. 256. 326 Si trois Quarrés BG, AH, AO, forment par leurs côtés un Triangle rectangle BAC, & qu'ayant abaissé une Perpendiculaire AD de l'Angle droit sur l'hypothénuse, on la prolonge jusqu'en F au travers du Quarré BG construit sur l'hypothénuse ; on aura $BF = AH$ & $CF = AO$: en sorte que le Quarré BG de l'hypothénuse sera égal à la somme $AH + AO$ des deux Quarrés construits sur les côtés AB, AC, de l'Angle droit.

DÉMONSTRATION.

Soient prolongés les côtés EB, GC, du Quarré de l'hypothénuse, & leur Parallele AF, jusqu'à ce

que leurs prolongemens rencontrent en I, M, L , les côtés prolongés HK, ON , des deux autres Quarrés. On trouvera que

1°. Les deux Triangles rectangles BAC, BHI , ont un côté égal adjacent à deux Angles égaux chacun à chacun. Car 1°. $BA=BH$; puisque ce sont les côtés du même Quarré AH . 2°. Les Angles BAC, BHI , étant droits, sont égaux; & les Angles ABC, HBI , étant des complémens du même Angle ABI , sont aussi égaux. Ainsi (N°. 119.) les deux Triangles BAC, BHI , sont parfaitement égaux; & par conséquent leurs hypothénuses BC, BI , sont égales: & comme les côtés BC, BE , du même Quarré BG , sont égaux, on aura aussi $BE=BI$.

Les deux Parallélogrammes $BF, ABIL$, établis sur les bases égales BE, BI , & renfermés entre les mêmes Paralleles EI, FL , sont donc égaux (N°. 134.). Mais le Parallélogramme $ABIL$ & le Quarré AH , sont aussi égaux (N°. 133.). Donc le Rectangle BF & le Quarré AH sont égaux.

2°. On prouvera de la même maniere que les Triangles rectangles BAC, MOC , sont parfaitement égaux, ayant un côté égal adjacent à deux Angles égaux chacun à chacun, savoir $CA=CO$, & les Angles BAC, ACB , égaux aux Angles O, OCM ; & par conséquent les hypothénuses BC, MC , de ces Triangles, seront égales: & comme $BC=CG$, il en résultera que $CG=MC$, & que les Parallélogrammes $CF, ACML$, compris entre mêmes Paralleles, & établis sur ces bases égales CG, MC , sont égaux (N°. 134.). Mais le Parallélogramme $ACML$ & le Quarré AO sont aussi égaux (N°. 133.). Donc le Parallélogramme rectangle CF & le Quarré AO seront aussi égaux.

Nous avons donc démontré que la Perpendiculaire ADF , tirée de l'Angle droit A sur l'hypothénuse BC , divise le Quarré de l'hypothénuse en deux Rectangles BF , CF , égaux aux deux Quarrés AH , AO , des côtés de l'Angle droit; & que le Quarré entier BG de l'hypothénuse est par conséquent égal à la somme $AH + AO$ des Quarrés construits sur les côtés AB , AC , de l'Angle droit. Ce qu'il falloit démontrer.

Quoiqu'il importe peu, pour la démonstration du Théorème, de savoir en quel Point le prolongement AL de la Droite AD rencontre le prolongement de la Droite HK , il est bon de remarquer que ce prolongement AL doit nécessairement passer par le Point où se rencontrent les prolongemens des côtés HK , ON , des deux Quarrés adjacens à l'Angle droit BAC .

Car les deux Triangles AKL , BHI , ayant les côtés parallèles chacun à chacun, ont aussi les Angles égaux chacun à chacun; & leurs côtés correspondans AK , BH , étant égaux, ces Triangles sont parfaitement égaux, & donnent par conséquent $KL = HI$: & comme on a trouvé $HI = AC = AN$, il est évident que $KL = AN$. Ainsi pour démontrer que le Point L est le Point où se rencontrent les prolongemens des deux Droites HK , ON , il suffit de faire voir que la portion du prolongement de HK , comprise entre AK & le prolongement de ON , doit nécessairement être égale à AN .

Or les prolongemens de HK & de ON , étant parallèles aux deux Droites AN , AK , formeront avec ces deux Lignes un Quadrilatere qui aura les côtés opposés parallèles & par conséquent égaux (No. 129.). Ainsi la portion du prolongement de HK , comprise entre AK & le prolongement de ON , sera nécessairement égale à AN ; & par conséquent le prolongement de la Droite AD perpendiculaire à l'hypothénuse BC , passera par le Point où se ren-

contreront les prolongemens des côtés HK , ON , des Quarrés adjacens à l'Angle droit.

COROLLAIRE I.

327 Le Quarré BG de l'hypothénuse, & les deux Rectangles BF , CF , dans lesquels il est divisé, étant compris entre mêmes Parallèles BC , EG , sont entr'eux comme leurs bases (N^o. 193.); c'est-à-dire, que $BG : BF : CF :: BC : BD : DC$. Fig. 256.

Donc en mettant les Quarrés AH , AO , pour les deux Rectangles BF , CF , auxquels ils sont égaux, l'on aura $BG : AH : AO :: BC : BD : DC$.

C'est-à-dire, que le Quarré de l'hypothénuse BC d'un Triangle rectangle, & les deux Quarrés des côtés qui renferment l'Angle droit, sont proportionnels à l'hypothénuse entiere BC , & aux parties BD , DC , de la même hypothénuse divisée par une Perpendiculaire AD menée de l'Angle droit sur elle.

COROLLAIRE II.

328 Si dans un même Cercle $BAEFC$, l'on tire par une extrémité B du Diametre tant de Cordes BA , BE , BF , qu'on voudra, & que des extrémités A , E , F , de ces Cordes, l'on abaisse sur le Diametre BC des Perpendiculaires AD , EG , FH ; on aura Fig. 257.

$$\overline{BC} : \overline{BA} : \overline{BE} : \overline{BF} :: BC : BD : BG : BH.$$

Car si des extrémités A , E , F , des Cordes BA , BE , BF , qui partent d'un même bout B du Diametre, on mene d'autres Cordes AC , EC , FC , à l'autre bout C du même Diametre, les Triangles BAC , BEC , BFC , compris dans le Demi-cercle, seront rectangles. Ainsi en construisant un Quarré

BN sur le Diametre BC , qui est l'hypothénuse commune à tous ces Triangles, & prolongeant les Perpendiculaires AD , EG , FH , au travers de ce Quarré, l'on aura (N^o. 326.)

$$\overline{BC}^2 = BN, \overline{BA}^2 = BK, \overline{BE}^2 = BL, \overline{BF}^2 = BM.$$

Mais (N^o. 193.) $BN: BK: BL: BM:: BC: BD: BG: BH$
Donc on aura aussi

$$\overline{BC}^2: \overline{BA}^2: \overline{BE}^2: \overline{BF}^2:: BC: BD: BG: BH$$

C'est-à-dire, que le Quarré du Diametre d'un Cercle, & les Quarrés de toutes les Cordes qui partent d'une extrémité B du Diametre, sont proportionnels au Diametre, & aux parties de ce Diametre comprises entre la même extrémité B , & les Perpendiculaires abaissées des extrémités des Cordes sur ce Diametre.

Fig. 258, 329 Ce second Corollaire fournit un moyen facile pour
259, 260 trouver des Lignes droites proportionnelles à tant de Fi-
& 261. gures semblables X, Y, Z , &c qu'on voudra, dont on connoitra les Lignes homologues bc, ba, be , &c.

Car si sur une Droite BC égale à la Ligne bc de la plus grande Figure X , on décrit un Demi-cercle $BEAC$, & qu'ayant fait les Cordes BA, BE , &c égales aux Lignes ba, be , homologues à bc , l'on abaisse des extrémités de ces Cordes, des Perpendiculaires AD, EF , &c. au Diametre BC ;

On aura $X: Y: Z: \&c:: BC: BD: BF: \&c$.

En voici la démonstration.

Les Figures X, Y, Z , &c étant semblables, & bc, ba, be , &c étant leurs Lignes homologues, on aura

$$(N^o. 319.) X: Y: Z: \&c:: \overline{bc}^2: \overline{ba}^2: \overline{be}^2: \&c.$$

Mais (N^o. 328.) $\overline{bc}^2: \overline{ba}^2: \overline{be}^2: \&c$ ou $BC: BA: BE: \&c$
:: $BC: BD: BF: \&c$.

Donc on aura aussi $X : Y : Z : \&c :: BC : BD : BF : \&c$;
c'est-à-dire, que les Droites BC , BD , BF , $\&c$ seront
proportionnelles aux Figures semblables X , Y , Z , $\&c$.

T H É O R È M E.

330 Si trois Figures semblables X , Y , Z , forment Fig. 263
par leurs Lignes homologues BC , BA , AC , un Triangle
rectangle BAC , & qu'on abaisse une Perpendiculaire
 AD de l'Angle droit sur l'hypothénuse BC ;

$$\text{On aura } \begin{cases} 1^{\circ}. X : Y : Z :: BC : BD : DC. \\ 2^{\circ}. X = Y + Z. \end{cases}$$

D É M O N S T R A T I O N.

Puisque les trois Figures X , Y , Z , sont sem-
blables, & que BC , BA , AC , sont des Lignes ho-
mologues terminées par des Points semblablement
placés à l'égard de ces Figures,

$$\text{On aura } X : Y : Z :: \overline{BC} : \overline{BA} : \overline{AC} \text{ (N}^{\circ}. 319.).$$

$$\text{Mais (N}^{\circ}. 327.) \overline{BC} : \overline{BA} : \overline{AC} :: BC : BD : DC.$$

$$\text{Donc on aura } 1^{\circ}. X : Y : Z :: BC : BD : DC.$$

Ce qu'il falloit 1^o. démontrer.

Il suit de là qu'on aura $X : Y + Z :: BC : BD + DC$
(N^o. 215.). Mais $BC = BD + DC$.

Donc on aura aussi $X = Y + Z$. Ce qu'il falloit
2^o. démontrer.

C O R O L L A I R E I.

331 Donc si trois Polygones semblables X , Y , Z , Fig. 264
forment par leurs côtés homologues BC , BA , AC ,
un Triangle rectangle BAC , & qu'on abaisse une
Perpendiculaire AD de l'Angle droit sur l'hypothé-
nuse BC ;

$$\text{On aura } \begin{cases} 1^{\circ}. X : Y : Z :: BC : BD : DC. \\ 2^{\circ}. X = Y + Z. \end{cases}$$

Car les côtés homologues de trois Figures semblables, sont des Lignes homologues de ces Figures. Ainsi les trois Polygones X, Y, Z , sont dans le cas des Figures semblables du Théorème.

COROLLAIRE II.

Fig. 265,
266, 267
& 268.

332 Donc si trois Polygones semblables X, Y, Z , tous trois inscrits, ou tous trois circonscrits, ou qui ont trois Angles correspondans aux Circonférences de trois Cercles, ou enfin qui ont chacun trois côtés homologues touchans des Cercles, forment par des Lignes égales aux Rayons ou aux Diametres de leurs Cercles, un Triangle rectangle BAC , & qu'on abaisse une Perpendiculaire AD de l'Angle droit sur l'hypothénuse de ce Triangle ;

1^o. Les trois Polygones qui répondront aux trois côtés BC, BA, AC , du Triangle rectangle, seront proportionnels à BC, BD, DC .

2^o. Le Polygone qui répondra à l'hypothénuse sera égal à la somme des deux autres.

Car les Rayons ou les Diametres des Cercles qui, appartiennent à ces Polygones, sont des Lignes homologues. Ainsi ces trois Polygones sont encore dans le cas de ceux du Théorème.

COROLLAIRE III.

Fig. 269
& 270.

333 Donc si trois Droites BC, BA, AC , égales aux Rayons ou aux Diametres de trois Cercles X, Y, Z , forment un Triangle rectangle BAC , & qu'on abaisse une Perpendiculaire AD de l'Angle droit de ce Triangle sur son hypothénuse ;

On

On aura $\begin{cases} 1^{\circ}. X:Y:Z::BC:BD:DC. \\ 2^{\circ}. X=Y+Z. \end{cases}$

Car trois Cercles peuvent être regardés comme trois Polygones semblables d'une infinité de côtés, tous trois inscrits ou tous trois circonscrits à des Cercles, & sont par conséquent dans le cas des Polygones du Corollaire précédent.

Avertissement.

Après avoir démontré dans le pénultième Théorème les Rapports de trois Quarrés qui forment par leurs côtés homologues un Triangle rectangle, on a eu recours à la propriété que les Figures semblables ont d'être proportionnelles aux Quarrés de leurs Lignes homologues, pour démontrer dans le dernier Théorème les Rapports de toutes les Figures semblables qui forment par leurs Lignes homologues un Triangle rectangle. Mais l'ordre qu'on a suivi n'étoit pas nécessaire; & l'on en va suivre un tout opposé, qui n'est ni moins simple, ni moins naturel.

On va donc, indépendamment de la propriété que les Figures semblables ont d'être proportionnelles aux Quarrés de leurs Lignes homologues, démontrer les Rapports des Figures semblables qui forment par leurs Lignes homologues un Triangle rectangle.

T H É O R È M E.

334 Si trois Triangles semblables BEC, BHA, AOC, Fig. 162. forment par leurs côtés homologues un Triangle rectangle BAC, & qu'ayant abaissé une Perpendiculaire AD de l'Angle droit A de ce Triangle sur son hypoténuse, on mène DE au sommet du Triangle BEC construis sur l'hypoténuse;

Géom.

R *

On aura $\left\{ \begin{array}{ll} 1^{\circ}. \text{ Le Triangle} & BED=BHA. \\ 2^{\circ}. \text{ Le Triangle} & DCE=AOC. \\ 3^{\circ}. \text{ Et par conséquent} & BEC=BHA+AOC. \end{array} \right.$

DÉMONSTRATION.

La Droite AD menée de l'Angle droit du Triangle BAC perpendiculairement sur son hypoténuse BC , divise ce Triangle en deux autres Triangles rectangles BDA , ADC , qui lui sont semblables. Car outre que le Triangle total BAC , & les deux Triangles BDA , ADC , dans lesquels il est partagé, ont chacun un Angle droit, les deux derniers BDA , ADC , ont chacun un Angle aigu commun avec le premier BAC .

1^o. Les Triangles semblables BDA , BAC , donneront $BD : BA :: BA : BC$.

Mais les deux Triangles BHA , BEC , étant semblables (*hyp.*), on aura $BA : BC :: BH : BE$.

Donc $BD : BA :: BH : BE$. Ainsi les deux Triangles BED , BHA , ont les côtés réciproques autour de leur Angle égal B , & sont par conséquent égaux (N^o. 195.). *Ce qu'il falloit démontrer.*

2^o. Les Triangles semblables ADC , BAC , donneront $CD : CA :: CA : CB$.

Mais les deux Triangles AOC , BEC , étant semblables (*hyp.*), on aura $CA : CB :: CO : CE$.

Donc $CD : CA :: CO : CE$. Ainsi les deux Triangles DCE , AOC , ont les côtés réciproquement proportionnels autour de leur Angle égal C , & sont par conséquent égaux (N^o. 195.). *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Fig. 262. 335 Puisque les Triangles BED , DCE , sont égaux aux Triangles BHA , AOC , on aura

DES FIGURES SEMBLABLES.

259

$$BEC : BHA : AOC :: BEC : BED : DCE.$$

Mais (N^o. 194.) $BEC : BED : DCE :: BC : BD : DC.$

$$\text{Donc } BEC : BHA : AOC :: BC : BD : DC.$$

C'est-à-dire, que si des Triangles semblables forment par leurs côtés homologues un Triangle rectangle BAC , & qu'on abaisse une Perpendiculaire AD de l'Angle droit de ce Triangle sur son hypothénuse, le Triangle BEC qui occupera l'hypothénuse, & les deux autres BHA , AOC , qui occuperont les côtés de l'Angle droit, seront proportionnels à l'hypothénuse entiere BC , & à ses parties BD , DC .

COROLLAIRE II.

336 Si trois Polygones semblables $BCEFG$, $BAHIK$, $ACMNO$, forment par leurs côtés homologues un Triangle rectangle BAC , celui qui occupera l'hypothénuse sera lui seul égal à la somme des deux autres, qui occuperont les côtés de l'Angle droit; & si l'on abaisse une Perpendiculaire AD de l'Angle droit sur l'hypothénuse, on aura

$$BCEFG : BAHIK : ACMNO :: BC : BD : DC.$$

Car si l'on divise ces trois Polygones en Triangles, par des Lignes tirées des Angles correspondans aux autres Angles, les Triangles correspondans de ces trois Polygones seront semblables chacun à chacun (N^o. 268.).

1^o. Les trois Triangles correspondans BCE , BAH , ACM , étant semblables, & formant par leurs côtés homologues le Triangle rectangle BAC , l'on aura $BCE = BAH + ACM$ (N^o. 334.), & $BCE : BAH : ACM :: BC : BD : DC$ (N^o. 335.).

2^o. Les trois Triangles suivans BEF , BHI , AMN , seront aussi semblables; & leurs côtés homologues EF , HI , MN , qui sont des côtés correspondans des trois Polygones proposés, étant proportionnels aux

trois côtés correspondans BC , BA , AC , qui forment le Triangle rectangle BAC , formeront, quand on le voudra, un autre Triangle rectangle qui sera semblable au Triangle BAC ; & la Perpendiculaire qu'on mènera de l'Angle droit de ce nouveau Triangle sur son hypothénuse, divisera cette hypothénuse en parties proportionnelles à BC , BD , DC : d'où il suit que le Triangle BEF , qui occupera l'hypothénuse de ce nouveau Triangle rectangle, sera égal à la somme $BHI + AMN$ des deux autres, & que ces trois Triangles seront entr'eux comme l'hypothénuse & les parties de l'hypothénuse du nouveau Triangle rectangle. Or cette hypothénuse & ses parties étant proportionnelles à BC , BD , DC , l'on aura $BEF : BHI : AMN :: BC : BD : DC$.

3°. On démontrera de la même manière que $BFG = BIK + ANO$,

& que $BFG : BIK : ANO :: BC : BD : DC$.

Les Triangles dans lesquels on a divisé le Polygone de l'hypothénuse, étant égaux à la somme des Triangles semblables correspondans, dans lesquels on a divisé les Polygones qui occupent les côtés de l'Angle droit; étant aussi prouvé que les Triangles du Polygone de l'hypothénuse, & les Triangles correspondans des deux autres Polygones, sont proportionnels à BC , BD , DC ; il est clair que le Polygone entier $BCEFG$ de l'hypothénuse est égal à la somme $BAHIK + ACMNO$ des deux autres, & que $BCEFG : BAHIK : ACMNO :: BC : BD : DC$.

COROLLAIRE III.

Fig. 263. 337 Donc si trois Polygones semblables forment par trois Lignes homologues un Triangle rectangle BAC , & que l'on abaisse une Perpendiculaire

AD de l'Angle droit sur l'hypothénuse, le Polygone qui répondra à l'hypothénuse sera égal à la somme des deux autres; & ces trois Polygones qui occuperont les côtés BC , BA , AC , du Triangle rectangle, seront proportionnels à BC , BD , DC .

Car les Lignes homologues des Polygones semblables sont proportionnelles aux côtés homologues de ces Figures. Donc si trois Polygones semblables forment par leurs Lignes homologues un Triangle rectangle BAC , ils pourront aussi former par leurs côtés homologues un Triangle semblable au premier BAC ; d'où il suit qu'ils seront dans le cas du Corollaire précédent.

COROLLAIRE IV.

338 Donc si trois Quarrés BG , AH , AO , forment par leurs côtés un Triangle rectangle BAC , celui BG de l'hypothénuse sera égal à la somme $AH + AO$ des deux autres. Fig. 250.

Et si l'on abaisse une Perpendiculaire AD de l'Angle droit du Triangle rectangle sur son hypothénuse BC , les trois Quarrés BG , AH , AO , seront proportionnels à BC , BD , DC .

Car trois Quarrés sont trois Figures semblables, & sont par conséquent dans le cas du Corollaire second.

On s'abstient de tirer du Théorème un plus grand nombre de Corollaires, & l'on se contente d'avertir qu'on doit encore déduire du Corollaire III deux Corollaires absolument semblables à ceux des Paragraphes 332 & 333.

REMARQUE.

339 La Théorie établie dans le dernier Théorème & ses Corollaires, conduit naturellement à
Rij

262 *Liv. V. Chap. III. DES RAPPORTS &c.*

conclurre que les Figures semblables sont proportionnelles aux Quarrés de leurs Lignes homologues.

Fig. 263,
264, 265,
265, 267,
268, 269,
& 270.

Car si l'on fait un Angle droit BAC , qui ait pour côtés des Lignes homologues ou des Droites égales aux Lignes homologues de deux Figures semblables Y & Z , & qu'après avoir tiré l'hypothénuse BC , l'on abaisse une Perpendiculaire AD , de l'Angle droit sur son hypothénuse, on aura $Y : Z :: BD : DC$ (*Nº. 334.*).

Mais si l'on fait ou que l'on imagine deux Quarrés construits sur les mêmes côtés AB , AC , de l'Angle droit, on aura aussi $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: BD : DC$.

Donc on aura $Y : Z :: \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2$; c'est-à-dire, que deux Figures semblables seront proportionnelles aux Quarrés de leurs Lignes homologues.

Il suit de là que deux Figures semblables, toutes deux inscrites ou toutes deux circonscrites, ou dont trois côtés homologues toucheront deux Cercles, ou dont trois Angles correspondans seront à la Circonférence de deux Cercles, seront proportionnelles aux Quarrés des Rayons, ou aux Quarrés des Diametres de leurs Cercles. Enfin l'on en conclurra que les surfaces de deux Cercles sont proportionnelles aux Quarrés de leurs Rayons, ou aux Quarrés de leurs Diametres.

Le Théorème des trois Figures semblables construites sur les côtés d'un Triangle rectangle, étant le fondement de l'Addition, de la Soustraction, de la Multiplication & de la Division des Figures semblables, lorsqu'on veut que le Résultat soit encore semblable aux Figures données; l'ordre demande qu'on n'éloigne pas trop ces quatre opérations de ce Théorème. Ainsi nous allons les expliquer dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE IV.

*De l'Addition, Soustraction, Multiplication & Division
des Figures semblables.*

DE L'ADDITION DES FIGURES SEMBLABLES.

PROBLÈME.

34^o *ETANT* données tant de Figures semblables
qu'on voudra, en trouver une qui soit égale à
leur somme, & qui leur soit semblable.

SOLUTION.

Après avoir déterminé les Lignes homologues des Fig. 271.
Figures que l'on doit ajouter, on mettra d'abord à
Angle droit les Lignes homologues AB , AC , de
deux de ces Figures; puis on tirera l'hypothénuse
 BC qui fera une Ligne homologue d'une Fi-
gure semblable & égale à la somme des deux pre-
mieres qui ont AB , AC , pour Lignes homo-
logues: en sorte que si l'on ne doit ajouter ensemble
que les deux Figures dont AB & AC sont les Li-
gnes homologues, le Problème se réduira à faire sur
l'hypothénuse BC , comme Ligne homologue, une
Figure semblable à celles qu'on propose d'ajouter
ensemble.

Si l'on doit ajouter une troisième Figure aux deux
premierres, on élèvera au bout de l'hypothénuse BC
une Perpendiculaire CD égale au côté homologue
de la troisième Figure; & l'on tirera l'hypothénuse
 BD , qui sera la Ligne homologue d'une Figure

semblable & égale à la somme des deux Figures qui ont BC & CD pour Lignes homologues, ou à la somme des trois Figures qui ont AB , AC , CD , pour Lignes homologues : parce que nous avons vu que la Figure qui a BC pour Ligne homologue, est égale à la somme des deux Figures semblables qui ont AB , AC , pour Lignes homologues.

Si l'on vouloit encore ajouter une quatrième Figure, on mèneroit à la seconde hypothénuse BD , & par son extrémité, une nouvelle Perpendiculaire DE égale à la Ligne homologue de la quatrième Figure ; puis on tireroit une troisième hypothénuse BE , qui seroit la Ligne homologue d'une Figure semblable aux précédentes, & égale à la somme des deux Figures qui auroient BD , DE , pour Lignes homologues, ou à la somme des quatre Figures qui auroient AB , AC , CD , DE , pour Lignes homologues : en sorte que le Problème se réduiroit alors à faire (N^o. 270.) sur BE , comme Ligne homologue, une Figure semblable à l'une de celles qui sont données ; & ainsi des autres Figures que l'on aura à ajouter.

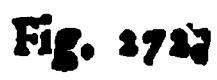
1^o. Si les Figures semblables sont rectilignes ; comme les côtés homologues sont les Lignes homologues les plus faciles à déterminer, & qu'il est plus aisé de faire des Figures semblables sur des côtés homologues, que sur des Lignes homologues qui ne sont pas côtés, on prendra les côtés homologues des Figures proposées, pour les disposer comme nous l'avons dit dans le Problème.

2^o. Si les Figures semblables qu'on doit ajouter ensemble sont des Cercles ; comme les Rayons ou les Diamètres des Cercles sont les Lignes homologues sur lesquelles il est le plus facile de construire des Cercles, on prendra les Rayons ou les Diamètres de ces Cercles pour leurs Lignes homologues : & lorsqu'on aura disposé ces Rayons ou ces Diamètres, considérés comme Lignes homologues.

de la maniere qu'il a été dit dans le Problème, le Cercle qu'on fera sur la dernière hypothénuse, prise pour Rayon ou pour Diametre, sera égal à la somme de tous les Cercles dont on aura employé les Rayons ou les Diametres.

COROLLAIRE.

341 Nous avons dit qu'une Ligne multipliée par son égale, ou par elle-même, produit un Quarré. Or la Ligne que l'on multiplie par son égale ou par elle-même, se nomme la Racine du Quarré que produit la multiplication; en sorte que le côté d'un Quarré est la Racine de ce Quarré. Cela posé :

1°. BC étant l'hypothénuse d'un premier Triangle rectangle BAC , l'on aura $\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2$. Ainsi  Fig. 2723

l'hypothénuse BC , qui est la Racine du Quarré \overline{BC}^2 , sera la Racine de la somme des deux Quarrés $\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2$:

& pour exprimer la Racine de cette somme, on l'écrit ainsi $\sqrt{\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2}$. On aura donc

$BC = \sqrt{\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2}$; c'est-à-dire, que l'hypothénuse d'un Triangle rectangle sera la Racine quarrée de la somme de deux Quarrés construits sur les côtés de l'Angle droit.

2°. BCD étant un nouveau Triangle rectangle en C , qui a pour côté l'hypothénuse du Triangle rectangle précédent, l'on aura $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2$; & à cause que $\overline{BC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2$, l'on aura $\overline{BD}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$. Ainsi la seconde hypothénuse BD , qui est la Racine du Quarré \overline{BD}^2 , sera égale à la Racine quarrée de la somme des trois Quarrés $\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$; ce qui s'écrit

ainsi, $BD = \sqrt{\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2}$.

266 Liv. V. Chap. IV. DE LA SOUSTRACTION

3°. BDE étant un nouveau Triangle rectangle en C, qui a pour côté l'hypothénuse du Triangle rectangle précédent, l'on aura $\overline{BE}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DE}^2$, ou (à cause que $\overline{BD}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$) $\overline{BE}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DE}^2$. Ainsi la troisième hypothénuse BE, qui est la Racine du Quarré \overline{BE}^2 , sera égale à la Racine de la somme des quatre Quarrés $\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DE}^2$; ce qu'on écrira ainsi, $BE = \sqrt{\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DE}^2}$.

On voit par là comment on pourra trouver la Racine quarrée de la somme de tant de Quarrés qu'on voudra, & comment on pourra exprimer & représenter la Racine quarrée de cette somme de Quarrés.

Il arrive souvent que les Commençans, pour tirer la Racine quarrée d'une somme de plusieurs Quarrés, prennent la somme des Racines de ces Quarrés. Par exemple, pour extraire la Racine de $\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2$, ils sont tentés de prendre BA + AC au lieu de BC. Or il est évident qu'en opérant ainsi, ils prennent une Racine trop grande; puisque (N°. 7.) $BA + AC > BC$ qui est la Racine de la somme des deux Quarrés $\overline{BA}^2, \overline{AC}^2$.

DE LA SOUSTRACTION DES FIGURES SEMBLABLES.

P B O B L É M E.

342 Soustraire une Figure d'une autre qui lui est semblable, & faire en sorte que le reste soit une Figure semblable aux deux premières.

S O L U T I O N .

Fig. 263 ou 264. Puisque trois Figures semblables X, Y, Z, qui forment par leurs côtés homologues, ou par leurs

Lignes homologues, un Triangle rectangle BAC , sont telles (*N^o*. 330 ou 331.) que celle X de l'hypothénuse est égale à la somme des deux autres Y, Z , c'est-à-dire, que $X = Y + Z$; il est clair que si l'on retranche la Figure Y de celle X , le reste sera égal à la Figure Z ; ou que si l'on retranche la Figure Z de la Figure X , le reste sera égal à la Figure Y : d'où il suit que lorsqu'on aura une Figure quelconque Y à soustraire d'une Figure semblable X , & qu'on voudra que le reste soit une Figure semblable aux deux premières, il faudra choisir dans les deux Figures deux Lignes homologues; puis faire un Triangle rectangle BAC , dont l'hypothénuse BC soit égale à la Ligne homologue de la plus grande Figure, & dont un côté BA soit égal au côté homologue de la plus petite, qui doit être retranchée. Cela fait, le troisième AC sera le côté homologue d'une Figure semblable aux deux premières & égale au reste de la Soustraction des deux Figures proposées; en sorte que le Problème se réduira à faire sur AC , comme Ligne homologue, une Figure semblable à celles qui sont données. Voici maintenant ce qu'il faut faire pour avoir un Triangle BAC , tel qu'on vient de le dire.

Ayant tiré une Droite BC égale au côté homologue de la plus grande Figure, on décrira sur elle comme Diametre un Demi-cercle BAC . Puis ayant tiré par l'extrémité B de ce Diametre une Corde BA égale au côté homologue de la plus petite Figure, on mènera, par son extrémité A & par l'autre extrémité C du Diametre, la Corde AC qui sera la Ligne homologue d'une Figure semblable aux deux précédentes, & égale au reste qu'on auroit après avoir retranché la Figure qui répond à BA de celle qui répond à BC .

Fig. 273.

Car l'Angle BAC ayant le sommet à la Circonférence, & étant appuyé sur le Diametre, est droit. Ainsi le Triangle BAC est rectangle, & a par conséquent les conditions que nous avons démontré suffisantes pour résoudre le Problème proposé.

On peut encore construire le Triangle rectangle BAC , avec les conditions demandées, de la manière suivante.

Fig. 274. On commencera par faire un Angle droit BAD , dont les côtés soient indéfinis. Puis ayant fait le côté AB égal à la Ligne homologue de la Figure qui doit être soustraite, de son extrémité B , comme Centre, & d'un Rayon égal à la Ligne homologue de la plus grande Figure, on décrira l'Arc ECF , qui coupera le côté AD de l'Angle droit en un Point C . Ensuite on mènera, si on le juge à propos, la Droite BC ; & l'on aura par ce moyen un Triangle rectangle BAC qui aura les conditions demandées, c'est-à-dire, qui aura pour hypoténuse une Droite BC égale à la Ligne homologue de la grande Figure, & pour côté BA une Ligne égale à la Ligne homologue de la plus petite Figure qu'on doit retrancher de la plus grande: en sorte que le côté AC sera la Ligne homologue d'une Figure semblable aux deux premières, & égale à leur différence.

1°. Si les deux Figures proposées, dont l'une doit être soustraite de l'autre, sont rectilignes, leurs côtés homologues seront les Lignes homologues les plus commodes. Ainsi l'on fera bien de prendre leurs côtés homologues pour les Lignes homologues, & en faire usage comme il est expliqué dans le Problème.

2°. Si les deux Figures proposées sont des Cercles, les Lignes homologues les plus commodes seront les Rayons ou les Diametres. Ainsi l'on emploiera leurs Rayons ou leurs Diametres comme il a été dit dans le Problème.

COROLLAIRE.

343 Puisque la Racine quarrée d'un Quarré est le côté de ce Quarré, & que le Triangle BAC étant rectangle en A , l'on a $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BA}^2$; si l'on tire la Racine quarrée de chaque membre de cette Égalité,

Fig. 273
ou 274.

l'on aura $AC = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{BA}^2}$: d'où il suit que si l'on veut avoir la Racine quarrée de la différence de deux Quarrés, il faudra faire, comme nous l'avons expliqué, un Triangle rectangle BAC ; qui ait pour hypoténuse le côté BC du plus grand Quarré, & qui ait pour un côté de l'Angle droit une Ligne BA égale au côté du plus petit Quarré; & le troisième côté AC de ce Triangle sera la Racine quarrée de la différence des deux Quarrés proposés.

DE LA MULTIPLICATION DES FIGURES SEMBLABLES.

Il ne s'agit point ici de la Multiplication des Figures semblables par des Lignes, & encore moins de la Multiplication des Figures semblables entr'elles, mais seulement de la Multiplication des Figures par des nombres abstraits; c'est-à-dire, qu'on se propose d'expliquer comment on peut faire une Figure multiple d'une Figure donnée, & qui soit semblable à cette Figure donnée.

PROBLÈME.

344 Faire une Figure qui soit un multiple d'une Figure X donnée, c'est-à-dire, qui contienne un certain nombre de fois la Figure proposée X , & qui soit de plus semblable à cette Figure proposée.

Fig. 276
ou 277.

S O L U T I O N.

Fig. 275
& 276,
ou 275
& 277.

Ayant tiré une Droite indéfinie BZ , & par un Point D quelconque ayant élevé sur elle une Perpendiculaire DA , l'on prendra à volonté la partie BD , qui répondra à la Figure donnée; puis on fera BC autant multiple de BD , que la Figure demandée le doit être de la Figure proposée X .

Sur BC , comme Diametre, on décrira un Demi-cercle qui rencontrera la Perpendiculaire indéfinie DA en quelque Point A ; & par le Point A , l'on mènera aux extrémités du Diametre les deux Cordes AB , AC , qui feront nécessairement entr'elles un Angle droit (N^o. 91.).

Enfin sur la Corde AB , qui est du côté de BD qui répond à la Figure donnée, l'on prendra AE égale à une Ligne MN de la Figure proposée X . Puis on mènera EF parallèle au Diametre BC : & cette Droite EF , comprise entre les côtés de l'Angle droit BAC , sera une Ligne de la Figure demandée, homologue à la Ligne MN de la Figure X proposée. Ainsi le reste du Problème se réduit à faire sur EF , comme Ligne homologue à MN , une Figure semblable à la Figure X ; & la Figure qu'on fera contiendra la Figure X autant de fois qu'on le demande. En voici la Démonstration.

La Figure semblable à X , qu'on fera sur EF comme Ligne homologue à MN , contiendra la Figure X , qui a AE ou MN pour Ligne homologue, autant de fois que EF contient EG (N^o. 330.).

Mais EF étant (Constr.) parallèle à BC , l'on aura (N^o. 262.) $EF : EG :: BC : BD$.

Mais (Constr.) BC contient BD autant de fois que la Figure demandée doit contenir la Figure proposée X .

Donc la Figure semblable à X , qu'on fera sur EF comme côté homologue à MN , contiendra la Figure X autant de fois qu'on le demande, & sera par conséquent la Figure qu'il falloit trouver.

Si l'on avoit pris des deux côtés de la Perpendiculaire AD deux parties BD, DC , proportionnelles à la Figure X proposée & à la Figure demandée, & qu'on eût suivi le reste de la construction, il auroit fallu prendre AF , & non pas EF , pour la Ligne de la Figure demandée, homologue à la Ligne MN de la Figure X proposée. Puis il auroit fallu construire sur AF , comme Ligne homologue à MN , une Figure semblable à la proposée X : & cette Figure auroit été la Figure demandée.

Fig. 276
& 278,
ou 277
& 278.

Car la Figure que l'on construiroit sur AF seroit à celle X , construite sur $MN = AE$, comme GF est à EG .

Mais $GF : EG :: DC : BD$; & (Constr.) DC & BD sont proportionnelles à la Figure demandée, & à la Figure proposée.

Donc la Figure que l'on construiroit sur AF seroit à la Figure proposée X dans le Rapport demandé, & seroit par conséquent la Figure demandée.

On doit remarquer que si la Figure qu'on propose de multiplier est rectiligne, il sera plus facile, pour l'opération qu'on vient d'expliquer, de prendre un de ses côtés que toute autre Ligne. Mais si la Figure proposée est une Figure inscrite ou circonscrite à un Cercle, ou si elle est un Cercle, il sera plus commode d'opérer sur le Rayon ou sur le Diamètre, que sur toute autre Ligne.

Si la Figure proposée doit être multipliée par un nombre entier, par exemple, par 3, le Problème se réduira à ajouter ensemble trois Figures égales à la Figure proposée. Ainsi l'on pourra faire la Multiplication par les Règles qui ont été expliquées pour l'Addition.

COROLLAIRE.

345 On a quelquefois besoin de Lignes qui soient multipliées par des Racines quarrées de nombre entier; par exemple, on peut avoir besoin de multiplier une Ligne AB par $\sqrt{2}$ ou par $\sqrt{3}$ &c. Or ces sortes de Lignes sont toujours les Racines quarrées de Quarrés multiples de \overline{AB} , & dont la multiplication est exprimée par le nombre qui est sous le Signe de la Racine. Par exemple, $AB \times \sqrt{2} = \sqrt{2 \overline{AB}}$; $AB \times \sqrt{3} = \sqrt{3 \overline{AB}}$: & ainsi des autres.

Car $2 \overline{AB} : \overline{AB} :: 2 : 1$; & $3 \overline{AB} : \overline{AB} :: 3 : 1$; &c: & tirant les Racines quarrées des termes de ces Proportions, l'on aura

$$\sqrt{2 \overline{AB}} : AB :: \sqrt{2} : 1, \text{ \& } \sqrt{3 \overline{AB}} : AB :: \sqrt{3} : 1.$$

Enfin faisant le produit des Extrêmes & celui des Moyens, l'on aura $\sqrt{2 \overline{AB}} = AB \times \sqrt{2}$, & $\sqrt{3 \overline{AB}} = AB \times \sqrt{3}$.

Mais $\sqrt{2 \overline{AB}}$ & $\sqrt{3 \overline{AB}}$ sont les côtés de deux Quarrés, dont l'un est double du Quarré \overline{AB} , & dont l'autre est triple du Quarré \overline{AB} : & ainsi des autres.

Donc ces expressions $AB \times \sqrt{2}$, $AB \times \sqrt{3}$, représentent les côtés de deux Quarrés, dont l'un est double du Quarré \overline{AB} , & dont l'autre est triple du Quarré \overline{AB} .

Or \overline{AB} ou AB étant donné, on trouve par le Problème

Problème qu'on vient d'expliquer, le côté du Quarré 2 \overline{AB} , & celui du Quarré 3 \overline{AB} , &c. Ainsi ce Problème donne le moyen de représenter par des Lignes ces expressions $AB \times \sqrt{2}$, $AB \times \sqrt{3}$, & toutes les autres expressions semblables.

DE LA DIVISION DES FIGURES EN D'AUTRES FIGURES SEMBLABLES.

Nous avons expliqué (N^o. 329.) la maniere de trouver des Lignes proportionnelles à des Figures semblables. Ainsi, puisqu'on trouve aisément combien de fois une Ligne est contenue dans une autre, on est en état de trouver combien de fois la plus petite de deux Figures semblables est contenue dans la plus grande. Nous avons aussi expliqué la maniere de diviser une Figure en plusieurs parties qui soient dans des Rapports donnés ; mais comme les parties résultantes de la Division n'étoient point semblables à la Figure divisée, il nous reste à faire voir comment on peut partager une Figure proposée quelconque en plusieurs autres Figures qui lui soient semblables.

P R O B L È M E.

346 *Diviser une Figure proposée X, en parties qui lui soient semblables, & proportionnelles à des Nombres donnés, ou à des Lignes données bd, de, ef, fc.* Fig. 279 & 281, ou 280 & 281.

S O L U T I O N.

Ayant tiré une Droite BC égale à une Ligne bc la plus commode de la Figure X, & l'ayant divisée (N^o. 263.) en parties BD, DE, EF, FC, proportionnelles aux Nombres donnés, ou aux Lignes données bd, de, ef, fc, qui sont en mêmes

Géom. S *

Rapports que les parties dans lesquelles on doit diviser la Figure X , on décrira sur elle comme Diametre un Demi-cercle BAC ; & par les extrémités D, F , des parties extrêmes, on élèvera sur ce Diametre des Perpendiculaires DA, FG , qui rencontreront la Demi-circonférence en quelques Points A, G ; puis on mènera les Cordes AB, GC , sur lesquelles, comme Lignes homologues à bc , l'on construira deux Figures semblables à la Figure X : & ces deux Figures seront deux parties de la Figure X , correspondantes aux deux proportionnelles bd, fc .

Pour trouver les autres parties de la Figure X , correspondantes aux autres proportionnelles de, ef , on portera les parties moyennes DE, EF , du Diametre en BQ & BP ; de maniere qu'elles aient pour origine commune une extrémité B du Diametre. Puis ayant élevé sur le Diametre les Perpendiculaires QN, PM , on tirera à la même extrémité B du Diametre, les Cordes NB, MB , sur lesquelles, comme Lignes homologues à bc , l'on construira des Figures semblables à la Figure X ; & ces nouvelles Figures seront les autres parties de la Figure X , correspondantes aux autres proportionnelles de, ef .

Ainsi les Figures semblables à X , que l'on construira sur les Cordes AB, GC, NB, MB , considérées comme Lignes homologues à bc , seront les parties dans lesquelles la Figure proposée X doit être divisée.

Pour démontrer que cette construction est bonne, il y a deux choses à prouver. Premièrement, il faut faire voir que la somme des Figures semblables à la Figure X , que l'on construira sur les Cordes AB, NB, MB, GC , considérées comme Lignes homologues à bc , est égale à la Figure X proposée. Ensuite il faut démontrer que les mêmes Figures seront

proportionnelles à bd , de , ef , fc , comme on le demande par les conditions du Problème.

1°. La Figure X que l'on construira sur le Diametre $BC = bc$, & toutes les autres Figures semblables à X , que l'on fera sur les Cordes AB , NB , MB , GC , considérées comme Lignes homologues à BC ou bc , seront (N°. 329.) proportionnelles à BC , BD , BQ , BP , FC , ou à BC , BD , DE , EF , FC , parce qu'on a fait $BQ = DE$ & $BP = EF$; & par conséquent (N°. 217.) la Figure construite sur $BC = bc$ sera à la somme des autres semblables construites sur les Cordes AB , NB , MB , GC , comme BC est à $BD + DE + EF + FC$.

Mais $BD + DE + EF + FC = BC$.

Donc aussi la somme des Figures construites sur les Cordes AB , NB , MB , GC , comme Lignes homologues à BC ou bc , sera égale à la Figure X , dont le côté bc est égal au Diametre BC . *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

2°. On vient de voir que les Figures semblables construites sur les Cordes AB , NB , MB , GC , sont proportionnelles à BD , DE , EF , FC .

Mais (Constr.) les Lignes BD , DE , EF , FC , sont proportionnelles aux Lignes données bd , de , ef , fc , ou aux Nombres donnés.

Donc les Figures semblables construites sur les Cordes AB , NB , MB , GC , considérées comme Lignes homologues, sont aussi proportionnelles aux Lignes données bd , de , ef , fc , ou aux Nombres donnés qui doivent être en même raison que ces Lignes. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

Donc la construction que l'on a donnée résout le Problème proposé.

COROLLAIRE I.

Fig. 279
& 282,
ou 280
& 282.

347 Si la Figure *X* proposée doit être divisée en parties égales, les Droites *bd*, *de*, *ef*, *fc*, proportionnelles à ces parties, seront égales; & les parties *BD*, *DE*, *EF*, *FC*, dans lesquelles on divisera le Diametre *BC*, seront aussi égales: en sorte que les parties *DE*, *EF*, qui sont entre les parties extrêmes de ce Diametre, étant transposées sur ce Diametre, de maniere qu'elles aient une extrémité commune *B* avec ce Diametre, se confondront dans toute leur étendue avec la premiere partie *BD*; & l'on n'aura qu'une seule & même Corde *BA* correspondante à toutes les parties du Diametre ainsi transposées. Il faudra donc faire sur *BA*, ou sur plusieurs Droites égales à *BA*, prises pour Lignes homologues à *bc*, autant de Figures semblables à *X*, qu'on voudra avoir de parties de la Figure *X*.

Ordinairement lorsqu'on divise une Figure en parties égales, on ne demande qu'une de ses parties, les autres étant inutiles.

COROLLAIRE II.

348 Lorsqu'une Ligne est divisée par la Racine quarrée d'un nombre, elle représente toujours la Racine quarrée du Quarré de la Ligne entiere, divisé par ce nombre. Par exemple, $\frac{AB}{\sqrt{2}}$ signifie $\sqrt{\frac{AB^2}{2}}$; $\frac{AB}{\sqrt{3}}$ signifie $\sqrt{\frac{AB^2}{3}}$: & ainsi des autres.

Car $2 : 1 :: \overline{AB} : \frac{\overline{AB}}{2}$, & $3 : 1 :: \overline{AB} : \frac{\overline{AB}}{3}$; & ainsi des autres.

Or tirant les Racines quarrées des termes de ces Proportions, l'on aura $\sqrt{2} : 1 :: AB : \sqrt{\frac{AB^2}{2}}$.

& $\sqrt{3} : 1 :: AB : \sqrt{\frac{AB^2}{3}}$; & par conséquent
 $\sqrt{\frac{AB^2}{3}} = \frac{AB}{\sqrt{3}}$ & $\sqrt{\frac{AB^2}{4}} = \frac{AB}{2}$.

Donc pour avoir en Lignes ces expressions $\frac{AB}{\sqrt{2}}$, $\frac{AB}{\sqrt{3}}$, &c, il faudra chercher le côté d'un Carré égal à la moitié ou au tiers du Carré construit sur la Ligne AB ; c'est-à-dire, qu'il faudra diviser en deux ou en trois Carrés égaux le Carré construit sur AB , & trouver le côté de l'une de ces parties, comme il a été expliqué.

COROLLAIRE III.

349 On a quelquefois besoin de ces expressions $AB \times \sqrt{\frac{2}{3}}$, $AB \times \sqrt{\frac{3}{4}}$, & d'autres semblables, dans lesquelles une Ligne est multipliée par la Racine quarrée d'une Fraction. Ces expressions représentent les Racines quarrées de Carrés qui sont au Carré de AB , comme le Numérateur de la Fraction qui est sous le Signe radical est à son Dénominateur.

Ainsi $AB \times \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3} AB^2}$; $AB \times \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4} AB^2}$.

Car $1 : \frac{2}{3} :: AB^2 : \frac{2}{3} AB^2$; & $1 : \frac{3}{4} :: AB^2 : \frac{3}{4} AB^2$.

Ainsi $1 : \sqrt{\frac{2}{3}} :: AB : \sqrt{\frac{2}{3} AB^2}$; & $1 : \sqrt{\frac{3}{4}} :: AB : \sqrt{\frac{3}{4} AB^2}$.

& $\sqrt{\frac{2}{3} AB^2} = AB \times \sqrt{\frac{2}{3}}$, & $\sqrt{\frac{3}{4} AB^2} = AB \times \sqrt{\frac{3}{4}}$.

Nous ferons encore remarquer que $AB \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $AB \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$, sont aussi précisément la même chose que $\sqrt{\frac{2}{3} AB^2}$, $\sqrt{\frac{3}{4} AB^2}$; & comme $AB \times \sqrt{\frac{2}{3}}$, $AB \times \sqrt{\frac{3}{4}}$, se réduisent à $\sqrt{\frac{2}{3} AB^2}$, $\sqrt{\frac{3}{4} AB^2}$, les expressions $AB \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $AB \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$, ne différeront pas, pour la valeur, de celles-ci $AB \times \sqrt{\frac{2}{3}}$, $AB \times \sqrt{\frac{3}{4}}$; & ainsi des autres.

Car $3 : 2 :: 3 \overline{AB} : 2 \overline{AB}$, ou $:: \overline{AB} : \frac{2}{3} \overline{AB}$;
 & $4 : 3 :: 4 \overline{AB} : 3 \overline{AB}$, ou $:: \overline{AB} : \frac{3}{4} \overline{AB}$.

Donc en tirant les Racines quarrées des quatre termes de chacune de ces Proportions, l'on aura $\sqrt{3} : \sqrt{2} :: AB : \sqrt{\frac{2}{3} \overline{AB}}$, & $\sqrt{4} : \sqrt{3} :: AB : \sqrt{\frac{3}{4} \overline{AB}}$; d'où il suit que $\sqrt{\frac{2}{3} \overline{AB}} = AB \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, & $\sqrt{\frac{3}{4} \overline{AB}} = AB \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$.

Or nous avons vû (N^o. 346.) la maniere de faire un Quarré égal à $\frac{2}{3} \overline{AB}$, ou à $\frac{3}{4} \overline{AB}$; & ainsi des autres; & comme les côtés de ces Quarrés égaux à $\frac{2}{3} \overline{AB}$, ou $\frac{3}{4} \overline{AB}$, sont $\sqrt{\frac{2}{3} \overline{AB}}$, $\sqrt{\frac{3}{4} \overline{AB}}$, nous avons aussi le moyen d'exprimer en Lignes $AB \times \sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $AB \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, & $AB \times \sqrt{\frac{3}{4}}$ ou $AB \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$.

CHAPITRE V.

Des Quarrés construits sur les côtés d'un Triangle non rectangle. & sur les côtés & les Diagonales d'un Parallélogramme. De l'Aire d'un Triangle quelconque. Du Quadrilatere inscrit dans le Cercle.

THÉORÈME.

Fig. 183. 350 **D**ANS tout Triangle obtusangle BCD, si l'on abaisse une Perpendiculaire DF, d'un Angle aigu D, sur le prolongement du côté BC opposé à cet Angle, on aura

$$1^{\circ}. \overline{BD} = \overline{CD} + \overline{BC} + 2 BC \times CF;$$

$$2^{\circ}. \overline{BD} = \overline{CD} - \overline{BC} + 2 BC \times BF.$$

DÉMONSTRATION.

1°. Les deux Triangles BFD , CFD , étant rectangles en F , on aura

$$\overline{BD}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{BF}^2$$

$$\& \quad \overline{DF}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{CF}^2$$

Et puisque $BF = BC + CF$, on aura (N°. 306.)

$$\overline{BF}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CF}^2 + 2BC \times CF.$$

On aura donc $\overline{BD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BC}^2 + 2BC \times CF$.
Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

2°. Les mêmes Triangles CFD , BFD , rectangles en F , donneront

$$\overline{CD}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{CF}^2$$

$$\& \quad \overline{DF}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{BF}^2$$

Et puisque $CF = BF - BC$, on aura (N°. 307.)

$$\overline{CF}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times BF.$$

On aura donc $\overline{CD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times BF$.

Et ajoutant à chaque membre $-\overline{BC}^2 + 2BC \times BF$,
on aura enfin $\overline{CD}^2 - \overline{BC}^2 + 2BC \times BF = \overline{BD}^2$.
Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

COROLLAIRE.

351 Le Triangle BCD étant toujours obtusangle, si d'un Angle aigu D on abaisse une Perpendiculaire DF , sur le prolongement du côté BC opposé à cet Angle, on aura

Fig. 283.

$$1°. CF = \frac{\overline{BD}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2}{2BC};$$

$$2°. BF = \frac{\overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2}{2BC}.$$

§ III

Car puisqu'on vient de trouver

$$1^{\circ}. \overline{BD} = \overline{CD} + \overline{BC} + 2BC \times CF;$$

$$2^{\circ}. \overline{BD} = \overline{CD} - \overline{BC} + 2BC \times BF;$$

Si l'on met encore $-\overline{CD} - \overline{BC}$ dans chaque membre de la premiere Égalité, & $-\overline{CD} + \overline{BC}$ dans chaque membre de la seconde, on aura

$$1^{\circ}. \overline{BD} - \overline{BC} - \overline{CD} = 2BC \times CF;$$

$$2^{\circ}. \overline{BD} + \overline{BC} - \overline{CD} = 2BC \times BF.$$

Donc en divisant par $2BC$ chaque membre de ces deux dernieres Égalités, on aura

$$1^{\circ}. \frac{\overline{BD} - \overline{BC} - \overline{CD}}{2BC} = CF;$$

$$2^{\circ}. \frac{\overline{BD} + \overline{BC} - \overline{CD}}{2BC} = BF.$$

THEOREME.

Fig. 184. 352 Dans tout Triangle ABC , si d'un Angle A l'on abaisse une Perpendiculaire AE sur le côté qui lui est opposé, & que cette Perpendiculaire soit renfermée dans le Triangle BAC , on aura $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} - 2BC \times BE$.

DÉMONSTRATION.

Les deux Triangles AEC , AEB , étant rectangles en E , on aura

$$\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{EC}$$

$$\& \quad \overline{AE} = \overline{AB} - \overline{BE}.$$

Et puisque $EC = BC - BE$, on aura (N^o. 307.)

$$\overline{EC} = \overline{BC} + \overline{BE} - 2BC \times BE.$$

On aura donc $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times BE$,
Ce qu'il falloit démontrer.

On démontrera de la même manière que

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times EC.$$

COROLLAIRE.

353 La Droite AE , perpendiculaire au côté BC , Fig. 284
étant toujours supposée au dedans du Triangle ABC ,

on aura le Segment $BE = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2BC}$.

Car puisque (N^o. 352.) $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times BE$;
si l'on ajoute à chaque membre $2BC \times BE$,
& qu'on en retranche \overline{AC}^2 , on aura

$$2BC \times BE = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2;$$

& divisant chaque membre par $2BC$, on aura

$$BE = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2BC}.$$

THÉORÈME.

354 Dans tout Parallélogramme $ABCD$, les deux Fig. 285
Quarrés des Diagonales AC , BD , valent ensemble les
Quarrés des quatre côtés AB , AD , BC , CD ; c'est-à-dire,
que $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2$.

DÉMONSTRATION.

Des deux extrémités du côté AD , soient abaissées
les Perpendiculaires AE , DF , sur le côté opposé
 BC : on verra aisément que $BE = CF$, & par con-
séquent que $2BC \times BE = 2BC \times CF$.

Mais (N^o. 352.) le Triangle ABC donnera

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times BE;$$

& (N^o. 350.) le Triangle BCD donnera

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2BC \times CF.$$

Donc si l'on ajoute ensemble ces deux Égalités, en supprimant les termes égaux $-2BC \times BE$, $+2BC \times CE$, qui ayant des Signes contraires se détruisent, on aura

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2:$$

& si l'on met \overline{AD}^2 pour un des deux \overline{BC}^2 , on aura

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2.$$

Ce qu'il falloit démontrer.

T H É O R È M E.

Fig. 284. 355 L'Aire d'un Triangle quelconque ABC est égale au quart de la Racine quarrée d'un Produit de quatre dimensions fait de la somme des trois côtés, multipliée par la différence de chaque côté à la somme des deux autres; c'est-à-dire, que l'Aire du Triangle ABC est égale à

$$\frac{1}{4} \sqrt{(AB + BC + AC) \times (AB + BC - AC) \times (AC + AB - BC) \times (AC + BC - AB)}.$$

D É M O N S T R A T I O N.

D'un Angle A du Triangle ABC soit abaissée une Perpendiculaire AE sur le côté opposé BC :

on aura (N^o. 353.) $BE = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2BC}$.

Quarrant chaque membre de cette Égalité, on aura

$$\overline{BE}^2 = \frac{(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2)^2}{(2BC)^2},$$

& par conséquent $\overline{AB}^2 - \overline{BE}^2$ ou $\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 - \frac{(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2)^2}{(2BC)^2}$.

Multipliant chaque membre par $(2BC)^2$, on aura $(\overline{AE})^2 \times (2BC)^2 = \overline{AB}^2 \times (2BC)^2 - (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2)^2$.

Prenant la Racine quarrée de chaque membre, & prenant le quart des deux membres qu'on trouvera, on aura $\frac{\overline{AE} \times BC}{2}$ ou l'Aire du Triangle $ABC =$

$$\frac{1}{4} \sqrt{\overline{AB}^2 \times (2BC)^2 - (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2)^2}.$$

Mais (N^o. 312.) $\overline{AB} \times (2BC)^2 - (\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC})^2$
est le produit de $AB \times 2BC + \overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC}$
par $AB \times 2BC - \overline{AB} - \overline{BC} + \overline{AC}$.

Ainsi l'Aire du Triangle ABC est égale à

$$\frac{1}{4} \sqrt{(\overline{AB} \times 2BC + \overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC}) \times (\overline{AB} \times 2BC - \overline{AB} - \overline{BC} + \overline{AC})}$$

Mais (N^o. 312.) $AB \times 2BC + \overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC}$
ou $\overline{AB} + \overline{BC} + 2AB \times BC - \overline{AC}$ est le produit
de $AB + BC + AC$ multiplié par $AB + BC - AC$.

Et $AB \times 2BC - \overline{AB} - \overline{BC} + \overline{AC}$ ou
 $\overline{AC} - \overline{AB} - \overline{BC} + 2AB \times BC$ est le produit de
 $AC + AB - BC$ multiplié par $AC - AB + BC$.

Donc l'Aire du Triangle ABC est égale à

$$\frac{1}{4} \sqrt{(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}) \times (\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC}) \times (\overline{AC} + \overline{AB} - \overline{BC}) \times (\overline{AC} + \overline{BC} - \overline{AB})}$$

Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

356 Comme 4 est la Racine quarrée de 16, au
lieu de prendre le quart de la Quantité

$$\sqrt{(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}) \times (\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC}) \times (\overline{AC} + \overline{AB} - \overline{BC}) \times (\overline{AC} + \overline{BC} - \overline{AB})},$$

ou de diviser cette Racine par 4, on peut la diviser
par $\sqrt{16}$: & l'Aire du Triangle ABC sera expri-
mée par

$$\frac{\sqrt{(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}) \times (\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC}) \times (\overline{AC} + \overline{AB} - \overline{BC}) \times (\overline{AC} + \overline{BC} - \overline{AB})}}{\sqrt{16}}$$

$$\text{ou par } \sqrt{\frac{(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}) \times (\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC}) \times (\overline{AC} + \overline{AB} - \overline{BC}) \times (\overline{AC} + \overline{BC} - \overline{AB})}{16}}$$

parce que pour prendre la Racine quarrée de la Frac-
tion qui est sous ce dernier Signe radical, il faudra
extraire la Racine quarrée de son Numérateur, &

284 *Liv. V. Chap. V. DE L'AIRE DU TRIANGLE.*
celle de son Dénominateur (*Arith. No. 142.*) ; ce
qui réduira la dernière expression à la précédente.

Mais la Fraction

$$\frac{(AB+BC+AC) \times (AB+BC-AC) \times (AC+AB-BC) \times (AC+BC-AB)}{16}$$

est égale à $\frac{AB+BC+AC}{2} \times \frac{AB+BC-AC}{2} \times \frac{AC+AB-BC}{2} \times \frac{AC+BC-AB}{2}$.

Donc l'Aire du Triangle ABC sera aussi exprimée

par $\sqrt{\frac{AB+BC+AC}{2} \times \frac{AB+BC-AC}{2} \times \frac{AC+AB-BC}{2} \times \frac{AC+BC-AB}{2}}$.

$$\text{Mais } \begin{cases} \frac{AB+BC-AC}{2} = \frac{AB+BC+AC}{2} - AC. \\ \frac{AC+AB-BC}{2} = \frac{AB+BC+AC}{2} - BC. \\ \frac{AC+BC-AB}{2} = \frac{AB+BC+AC}{2} - AB. \end{cases}$$

Donc l'Aire du Triangle ABC pourra aussi être
exprimée par

$$\sqrt{\frac{AB+BC+AC}{2} \times \left(\frac{AB+BC+AC}{2} - AC\right) \times \left(\frac{AB+BC+AC}{2} - BC\right) \times \left(\frac{AB+BC+AC}{2} - AB\right)}.$$

Cette dernière expression de l'Aire du Triangle
 ABC , fait voir qu'on aura l'Aire de ce Triangle, en
prenant la Racine quarrée du produit de quatre quan-
tités, dont la première sera égale à la moitié de la
somme des trois côtés du Triangle ABC , & dont les
trois autres seront faites de la même demi-somme,
dont on retranchera séparément les trois côtés du
Triangle.

Par exemple, si les trois côtés AB , BC , AC , du
Triangle ABC , sont de 4 Toises, 15 Toises, & 13
Toises, on prendra la moitié de la somme de ces trois
côtés ; & l'on aura 16 Toises.

Puis on retranchera séparément de cette demi-somme
chacun des trois côtés ; c'est-à-dire, que

On retranchera d'abord 4 Toises de
16 T ; & l'on aura 12 Toises.

Puis on retranchera 15 Toises de 16 T;
& l'on aura 1 Toise.

Ensuite on retranchera 13 Toises de
16 T, & l'on aura 3 Toises.

Après quoi l'on multipliera ensemble ces quatre
nombres 16, 12, 1, 3, pour n'en faire qu'un seul
produit, qui sera 576.

Enfin l'on tirera la Racine quarrée de ce produit :
& la Racine 24 qu'on trouvera, signifiera que l'Aire
du Triangle ABC contient 24 Toises quarrées.

THEOREME.

357 Quand un Quadrilatre $ABCD$ est inscrit dans un Cercle, le produit des deux Diagonales AC , BD , est égal à la somme des produits des côtés opposés; c'est-à-dire, que $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$. Fig. 286.

DÉMONSTRATION.

Soit fait l'Angle $BAP =$ l'Angle CAD ; on aura aussi l'Angle $BAC =$ l'Angle DAP . Cela posé:

1°. Les Triangles BAP , CAD , seront semblables (N°. 254.). Car l'Angle $BAP =$ l'Angle CAD (Construction); & l'Angle $ABP =$ l'Angle ACD (N°. 90.). Ainsi l'on aura $AB : AC :: BP : CD$; & par conséquent (N°. 196.) $AC \times BP = AB \times CD$.

2°. Les deux Triangles CAB , DAP , seront aussi semblables (N°. 254.).

Car outre l'Angle $BAC =$ l'Angle DAP , on aura encore l'Angle $ACB =$ l'Angle ADP (N°. 90.). Ainsi l'on aura $AC : AD :: BC : PD$; & par conséquent (N°. 196.) $AC \times PD = AD \times BC$.

Ajoutant ces deux Égalités membre à membre, on aura $AC \times BP + AC \times PD = AB \times CD + AD \times BC$, c'est-à-dire, $AC \times (BP + PD)$ ou $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$. Ce qu'il falloit démontrer,

T H É O R È M E.

Fig. 287. 358 Si l'on tire les Diagonales AC, BD , d'un Quadrilatere $ABCD$ inscrit dans un Cercle, la Diagonale AC coupera l'autre Diagonale BE en deux parties BE, DE , proportionnelles aux produits $AB \times BC, AD \times CD$, des côtés contigus adjacens à cette Diagonale; c'est-à-dire, qu'on aura $BE : DE :: AB \times BC : AD \times CD$.

D É M O N S T R A T I O N.

1°. Les Triangles AEB, DEC , seront semblables (N°. 254.).

Car (N°. 90.) l'Angle $ABE =$ l'Angle DCE , & l'Angle $BAE =$ l'Angle CDE . Ainsi l'on aura
 $BE : CE :: AB : CD$.

2°. Les Triangles BEC, AED , seront aussi semblables (N°. 254.).

Car (N°. 90.) l'Angle $BCE =$ l'Angle ADE , & l'Angle $CBE =$ l'Angle DAE . Ainsi l'on aura
 $CE : DE :: BC : AD$.

Multipliant ces deux Proportions par ordre, en supprimant le terme CE qui se trouve parmi les premiers Antécédens & les premiers Conséquens, on aura (N°. 235.) $BE : DE :: AB \times BC : AD \times CD$.
 Ce qu'il falloit démontrer.



